

Indice

1	GENERACION DE MALLAS SOBRE UNA LINEA	2
1.1	INTRODUCCION	2
1.2	MALLAS Y ERROR DE APROXIMACION	7
1.2.1	Aproximación en una malla uniforme y una malla geométrica de la ecuación $((\alpha + \beta X)u_X)_X = 0$	11
1.2.2	Conclusiones	19
1.3	GENERACION CON CONTROL DEL ESPACIO DE MALLA	20
1.3.1	Funciones de control	22
1.3.2	Función de peso en el espacio físico	33
1.4	GENERADORES DE MALLAS DE POISSON	38
1.4.1	El generador AH	38
1.4.2	El generador TTM	42
1.5	TRANSFORMACION DEL PROBLEMA DE DIRICHLET.	44
1.6	MALLAS ADAPTIVAS	46
1.7	EL CALCULO VARIACIONAL Y LA GENERACION DE MALLAS	50
1.8	IMPLEMENTACION NUMERICA	52
1.9	Un ejemplo resuelto	55
1.9.1	1ª aproximación (malla uniforme)	56
1.9.2	2ª Aproximación (malla con exp)	58
1.9.3	3ª Aproximación (malla con senh)	60

1.9.4	4ª aproximación (malla geométrica)	62
2	APROXIMACION EN DIFERENCIAS FINITAS	65
2.1	INTRODUCCION	65
2.2	ESQUEMAS DE APROXIMACION	66
2.2.1	ANALISIS DE APROXIMACION	68
2.2.2	ESQUEMAS GENERALES DE APROXIMACION	72
2.3	EL PROBLEMA DE DIRICHLET EN UNA DIMENSION	74
2.4	APROXIMACION EN DIMENSIONES SUPERIORES	77
2.4.1	DERIVADAS MIXTAS.	77
2.4.2	MALLAS IRREGULARES	79
2.5	EL PROBLEMA DE DIRICHLET EN DOS DIMENSIONES	84
3	GENERACION DE MALLAS EN EL PLANO	90
3.1	INTRODUCCION	90
3.1.1	Diferentes mallas sobre el cuadrado unitario	92
3.2	METODOS SENCILLOS PARA GENERAR MALLAS	94
3.2.1	El generador T.F.I.	94
3.2.2	El generador A.H.	96
3.3	METODOS VARIACIONALES	102
3.3.1	La funcional de longitud	103
3.3.2	La funcional de área	110
3.3.3	La funcional de ortogonalidad	114
3.3.4	Combinación de funcionales	117
3.3.5	La funcional de suavidad	121
3.4	METODOS DISCRETOS	123
3.4.1	El área como función de peso para la longitud.	123
3.5	IMPLEMENTACION NUMERICA	126
3.6	TRANSFORMACION DEL PROBLEMA DE DIRICHLET	130

3.7	SOLUCION DE E.D.P.	
	USANDO MALLAS RECTANGULARES	134
3.7.1	Ecuaciones sobre el cuadrado unitario I_2	134
3.7.2	Regiones irregulares	138
3.7.3	Región “Escalón”	138
3.7.4	Región “m19”	140

CAPITULO 1

GENERACION DE MALLAS SOBRE UNA LINEA

1.1 INTRODUCCION

Una tendencia común de los métodos numéricos para la solución de ecuaciones diferenciales es el de transformar dichas ecuaciones en sistemas de ecuaciones algebraicas, en donde las incógnitas serán los valores de la función en un conjunto de puntos sobre los cuales se desea realizar la aproximación.

Esto nos conduce a la elección de un conjunto discreto de puntos en el dominio de la ecuación a resolver, tal elección se denomina generación de mallas.

Una malla sobre el intervalo $[a, b]$ es un conjunto de puntos x_0, x_1, \dots, x_N , tales que:

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$$

De acuerdo con esto determinar una malla sobre un cierto intervalo no parece tener ninguna dificultad, sin embargo la aproximación obtenida por los métodos numéricos dependerá en gran medida de la elección adecuada de la malla.

Uno de los principales objetivos de la generación de mallas es el de encontrar una distribución de puntos que nos permita reducir el error cometido en las aproximaciones obtenidas al discretizar una ecuación diferencial.

La malla más simple consiste en una distribución uniforme de puntos en todo el dominio, sin embargo esta distribución en general puede producir un error de aproximación muy grande, por lo que los métodos numéricos pueden converger más lentamente.

La idea básica que utilizaremos para la generación de mallas unidimensional es la de determinar una función inyectiva definida en el intervalo $[0, 1]$, al cual nos referiremos como dominio lógico, cuya imagen sea el dominio en el cual se desea trabajar, siendo este nuestro dominio físico, de esta manera una distribución uniforme de puntos en la región simple, será llevada en una malla sobre la región física, cuya distribución dependerá del mapeo utilizado,

Así, se tiene el siguiente problema:

Determinar:

$$X : [0, 1] \rightarrow [a, b]$$

$$X(0) = a \quad X(1) = b$$

$$X_\xi \neq 0 \quad \forall \xi \in [0, 1].$$

Por supuesto la solución no es única pues existen varias funciones que cumplen con las condiciones del problema, las funciones que cumplen estas condiciones son llamadas **funciones de distribución o generadores de mallas**.

Algunas funciones de distribución del intervalo $[0, 1]$ al intervalo $[a, b]$ son dadas a continuación con sus respectivas gráficas:¹

1) El caso más sencillo es la función:

$$X(\xi) = a + (b - a)\xi \tag{1.1}$$

La distribución obtenida por esta función es una malla uniforme, es decir es la malla más simple que puede generarse.

2) Para obtener una distribución diferente con una función lineal podemos utilizar una

¹Las gráficas son realizadas tomando $[a, b] = [-1, 1]$ y $\xi_0 = .5$

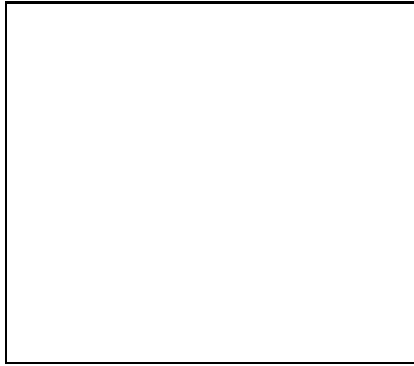


Fig. 1-1: MALLA UNIFORME

función por pedazos de la forma:

$$X(\xi) = \begin{cases} k_0\xi + a & 0 \leq \xi \leq \xi_0 \\ 2k_0(\xi - 1) + b & \xi_0 < \xi \leq 1 \end{cases}$$

donde

$$k_0 = \frac{b - a}{2 - \xi_0}$$

Las mallas generadas por esta función tendrán un cambio de distribución en el punto ξ_0 , dicho cambio dependerá del valor de k_0 , es decir, la acumulación de puntos depende directamente de las pendientes de las rectas involucradas.

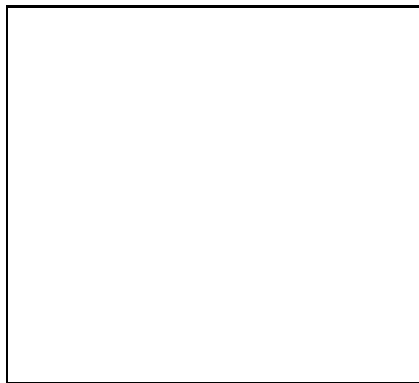


Fig. 1-2: MALLA LINEAL.

3) El ejemplo anterior puede ser generalizado fácilmente a polinómios de cualquier orden, como ejemplo tomemos la función cuadrática:

$$X(\xi) = \begin{cases} \frac{\xi}{2} \left(\xi + \frac{\xi}{5} \right) + a & 0 \leq \xi \leq \xi_0 \\ -\xi(\xi - 2) + (b - 1) & \xi_0 < \xi \leq 1 \end{cases}$$

Los puntos en este caso se acumulan en los extremos del intervalo $[a, b]$ mientras que los puntos en la parte central están muy separados, este cambio en la distribución se debe a la manera en que crece o decrece la derivada de la función.

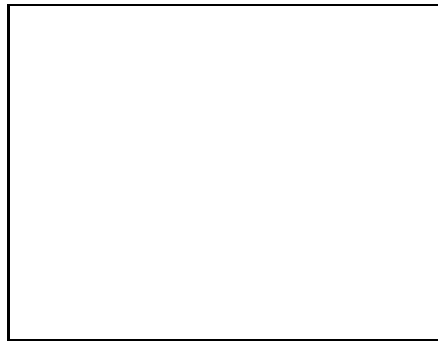


Fig. 1-3: MALLA CUADRATICA

4) Por supuesto los polinómios no son las únicas funciones que pueden utilizarse, la exponencial es una función que resulta de gran utilidad, y que puede ser utilizada de varias formas, una de ellas es la siguiente:

$$X(\xi) = \frac{1}{2} \begin{cases} -\exp(2(\xi_0 - \xi)) + \exp(2\xi_0) + 2a & 0 \leq \xi \leq \xi_0 \\ \exp(2(\xi - \xi_0)) - \exp(2(1 - \xi_0)) + 2b & \xi_0 < \xi \leq 1 \end{cases} \quad (1.2)$$

Una importante ventaja de esta función sobre las anteriores es la suavidad, es decir tiene derivada continua, la cual es una propiedad muy importante en la generación de mallas.

En las siguientes secciones veremos algunos ejemplos de generadores de mallas suaves que no involucran a la exponencial.

Es importante analizar las propiedades de cada una de las funciones utilizadas para generar mallas para de esta manera saber cuál es la que más conviene utilizar en cada problema par-

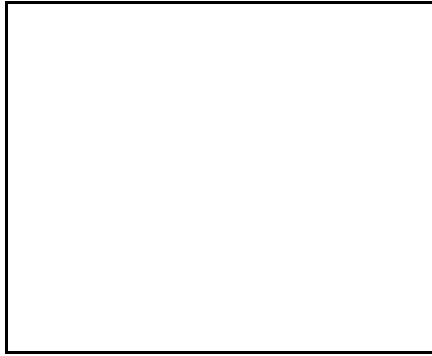


Fig. 1-4: MALLA EXPONENCIAL

ticular.

En las siguientes secciones se analizarán diversos métodos para generar mallas y las propiedades de estas.

Por simplicidad la generación de mallas a menudo se lleva a cabo sobre el intervalo $[0, 1]$ y posteriormente es transformada al intervalo $[a, b]$ por medio de la función (1.1), así que los ejemplos que serán dados más adelante serán trabajados sobre el intervalo $[0, 1]$.

La generación de mallas unidimensional servirá principalmente para ilustrar los conceptos básicos y los algoritmos numéricos necesarios para la generación de mallas en dimensiones superiores.

1.2 MALLAS Y ERROR DE APROXIMACION

Veamos ahora un ejemplo de la utilidad de generar una malla apropiada.

Tomemos como modelo el problema de Dirichlet para la ecuación:

$$\frac{d}{dX} \left[K(X) \frac{du}{dX} \right] = 0 \quad 0 < X < l \quad (1.3)$$

bajo las condiciones:

$$u(0) = 0 \quad u(l) = 1$$

Una aproximación standard de la ecuación anterior y el error correspondiente serán obtenidos ahora, considerando una malla de $N - 1$ puntos internos con $X_0 = 0$; $X_N = l$.

Usando el esquema de diferencias centrales:²

$$\left(\frac{d}{dX} \left[K(X) \frac{du}{dX} \right] \right)_i \approx \frac{1}{\delta X_i} \left[K_{i+\frac{1}{2}} \left(\frac{du}{dX} \right)_{i+\frac{1}{2}} - K_{i-\frac{1}{2}} \left(\frac{du}{dX} \right)_{i-\frac{1}{2}} \right] = 0 \quad (1.4)$$

donde $\delta X_i = X_{i+\frac{1}{2}} - X_{i-\frac{1}{2}}$; $K_{i\pm\frac{1}{2}} = K(X_{i\pm\frac{1}{2}})$ y $X_{i\pm\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(X_i + X_{i\pm 1})$.

Para saber cual es el error cometido en la aproximación anterior definamos

$$F = K(X) \frac{du}{dX}$$

La serie de Taylor para $F_{i+\frac{1}{2}}$ es:

$$F_{i+\frac{1}{2}} = F_i + \tilde{\delta} X_i \left(\frac{dF}{dX} \right)_i + \frac{1}{2!} \tilde{\delta} X_i^2 \left(\frac{d^2 F}{dX^2} \right)_i + \dots$$

con $\tilde{\delta} X_i = X_{i+\frac{1}{2}} - X_i$

pero de la ecuación 1.3:

$$\frac{dF}{dX} = 0$$

Así que se tiene:

²El esquema de diferencias centrales y otros esquemas comunes serán estudiados en el capítulo 2.

$$F_{i+\frac{1}{2}} - F_i = \tilde{\delta}X_i \frac{dF}{dX} = 0$$

Es decir

$$F_{i+\frac{1}{2}} - F_i = 0 \quad (1.5)$$

Por otro lado si consideramos la serie de Taylor para $F_{i-\frac{1}{2}}$ y desarrollamos de manera análoga podemos obtener la identidad:

$$F_i - F_{i-\frac{1}{2}} = 0 \quad (1.6)$$

Finalmente sumando 1.5 con 1.6 tenemos:

$$F_{i+\frac{1}{2}} - F_{i-\frac{1}{2}} = 0 = \frac{dF}{dX}$$

es decir, la aproximación (1.4) es exacta pues la diferencia entre el esquema usado y la ecuación original es igual a cero, es importante tener en cuenta que esto se debe a la homogeneidad de la ecuación, en general dicha diferencia es distinta de cero.

Aproximando ahora la derivada de u con el mismo esquema y usando las identidades $\delta X_{i+\frac{1}{2}} = \Delta X_i$, $\delta X_{i-\frac{1}{2}} = \nabla X_i$ con $\Delta X_i = X_{i+1} - X_i$; $\nabla X_i = X_i - X_{i-1}$; tenemos:

$$\frac{d}{dX} \left[K(X) \frac{du}{dX} \right] \approx \frac{1}{\delta X_i} \left[K_{i+\frac{1}{2}} \frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta X_i} - K_{i-\frac{1}{2}} \frac{u_i - u_{i-1}}{\nabla X_i} \right] \quad (1.7)$$

Debemos ahora analizar el error de esta nueva aproximación.

La serie de Taylor para u_i y u_{i+1} son:

$$u_{i+1} = u_{i+\frac{1}{2}} + \frac{\Delta X_i}{2} \left(\frac{du}{dX} \right)_{i+\frac{1}{2}} + \frac{1}{2!} \frac{\Delta X_i^2}{4} \left(\frac{d^2u}{dX^2} \right)_{i+\frac{1}{2}} + \frac{1}{3!} \frac{\Delta X_i^3}{8} \left(\frac{d^3u}{dX^3} \right)_{i+\frac{1}{2}} + \dots$$

$$u_i = u_{i+\frac{1}{2}} - \frac{\Delta X_i}{2} \left(\frac{du}{dX} \right)_{i+\frac{1}{2}} + \frac{1}{2!} \frac{\Delta X_i^2}{4} \left(\frac{d^2u}{dX^2} \right)_{i+\frac{1}{2}} - \frac{1}{3!} \frac{\Delta X_i^3}{8} \left(\frac{d^3u}{dX^3} \right)_{i+\frac{1}{2}} + \dots$$

Tenemos entonces:

$$\frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta X_i} = \left(\frac{du}{dX} \right)_{i+\frac{1}{2}} + E.T.(\Delta)$$

donde

$$E.T.(\Delta) = \frac{\Delta X_i^2}{24} \left(\frac{d^3u}{dX^3} \right)_{i+\frac{1}{2}} + \frac{1}{5!} \frac{\Delta X_i^4}{16} \left(\frac{d^5u}{dX^5} \right)_{i+\frac{1}{2}} + \dots$$

análogamente usando la serie para u_i y u_{i-1} tenemos:

$$E.T.(\nabla) = \frac{\nabla X_i^2}{24} \left(\frac{d^3u}{dX^3} \right)_{i-\frac{1}{2}} + \frac{1}{5!} \frac{\nabla X_i^4}{16} \left(\frac{d^5u}{dX^5} \right)_{i-\frac{1}{2}} + \dots$$

Finalmente, sumando los errores de cada aproximación tenemos que el error total del esquema(1.7) esta dado por:

$$E.T. = \frac{1}{\delta X_i} \left\{ \left[\frac{\Delta X_i^2}{24} \left(K \frac{d^3u}{dX^3} \right)_{i+\frac{1}{2}} - \frac{\nabla X_i^2}{24} \left(K \frac{d^3u}{dX^3} \right)_{i-\frac{1}{2}} + \dots \right] + \dots \right\} \quad (1.8)$$

El error cometido usando espacio de malla constante puede obtenerse por un desarrollo similar, tomando para este caso:

$$\Delta X_i = \nabla X_i = \Delta X$$

con lo cual el error toma la forma:

$$E.T. = \frac{\Delta X^2}{24} \frac{d}{dX} \left[K \frac{d^3u}{dX^3} \right]_i + \text{T.O.S.} \quad (1.9)$$

donde T.O.S. denota Términos de Orden Superior.

Observemos que el error cometido con un espacio de malla constante es proporcional a ΔX^2 mientras que para una malla no uniforme el error es proporcional a

$$\max \left(\frac{\Delta X_i^2}{\delta X_i}; \frac{\nabla X_i^2}{\delta X_i} \right) \approx \Delta X$$

y como $\Delta X < 1$ entonces $\Delta X^2 < \Delta X$, es decir, en términos generales el esquema resulta una mejor aproximación usando una malla uniforme, sin embargo como veremos a continuación es posible dar una malla no uniforme de tal forma que el error disminuya aún más, para ver esto analicemos el error (1.8).

En (1.8) la parte dominante es:

$$E.T_{.dom} = \frac{1}{\delta X_i} \left[\frac{\Delta X_i^2}{24} \left(K \frac{d^3 u}{dX^3} \right)_{i+\frac{1}{2}} - \frac{\nabla X_i^2}{24} \left(K \frac{d^3 u}{dX^3} \right)_{i-\frac{1}{2}} \right] \quad (1.10)$$

De la ecn. (1.3) tenemos que

$$K(X) \frac{du}{dX} = q$$

o bien

$$\frac{du}{dX} = \frac{q}{K(X)} \quad (1.11)$$

con q una constante, por lo que las derivadas superiores de u pueden ser calculadas en términos de K , podemos así sustituir las derivadas de u involucradas en el error por derivadas de K , para esto observemos que:

$$\frac{d^2 u}{dX^2} = -q \left[\frac{1}{K^2} \left(\frac{dK}{dX} \right) \right]$$

$$\frac{d^3 u}{dX^3} = \frac{q}{K^2} \left[\frac{2}{K} \left(\frac{dK}{dX} \right)^2 - \frac{d^2 K}{dX^2} \right] \quad (1.12)$$

Al calcular el error en términos de las derivadas de K se tiene:

$$E.T_{.dom} = \frac{1}{\delta X_i} \left\{ \frac{\Delta X_i^2}{24} q \left[\frac{2}{K^2} \left(\frac{dK}{dX} \right)^2 - \frac{1}{K} \left(\frac{d^2 K}{dX^2} \right) \right]_{i+\frac{1}{2}} \right\} -$$

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{\delta X_i} \left\{ \frac{\nabla X_i^2}{24} q \left[\frac{2}{K^2} \left(\frac{dK}{dX} \right)^2 - \frac{1}{K} \left(\frac{d^2 K}{dX^2} \right) \right]_{i-\frac{1}{2}} \right\} = \\
= \frac{q}{24\delta X_i} \left[\Delta X_i^2 \kappa_{i+\frac{1}{2}} - \nabla X_i^2 \kappa_{i-\frac{1}{2}} \right]
\end{aligned} \tag{1.13}$$

donde de la ecn. (1.12)

$$\kappa(X) = q \left[\frac{2}{K^2} \left(\frac{dK}{dX} \right)^2 - \frac{1}{K} \frac{d^2 K}{dX^2} \right] = K \frac{d^3 u}{dX^3}$$

Deseamos tener $E.T._{dom} = 0$ para esto debe cumplirse

$$\Delta X_i^2 \kappa_{i+\frac{1}{2}} - \nabla X_i^2 \kappa_{i-\frac{1}{2}} = 0$$

es decir

$$\frac{\nabla X_i}{\Delta X_i} = \left(\frac{\kappa_{i+\frac{1}{2}}}{\kappa_{i-\frac{1}{2}}} \right)^{\frac{1}{2}} \tag{1.14}$$

1.2.1 Aproximación en una malla uniforme y una malla geométrica de la ecuación $((\alpha + \beta X)u_X)_X = 0$

Observemos que la regla obtenida es específica de la ecn. (1.3) pero no está restringida a ninguna forma particular de $K(X)$.

Tomemos el caso particular

$$K(X) = \alpha + \beta X. \tag{1.15}$$

La solución analítica a la ecuación (1.3) con K dada por (1.15) es:

$$u(X) = \frac{\ln \left(\frac{\alpha + \beta X}{\alpha} \right)}{\ln \left(\frac{\alpha + \beta l}{\alpha} \right)} \tag{1.16}$$

La solución se caracteriza geoméricamente por una zona con un rápido cambio en sus valores cerca de $X = 0$, esta variación es mayor en tanto sea mayor el valor de β .

Si aproximamos la ecuación (1.3) utilizando una malla uniforme obtendremos un error de

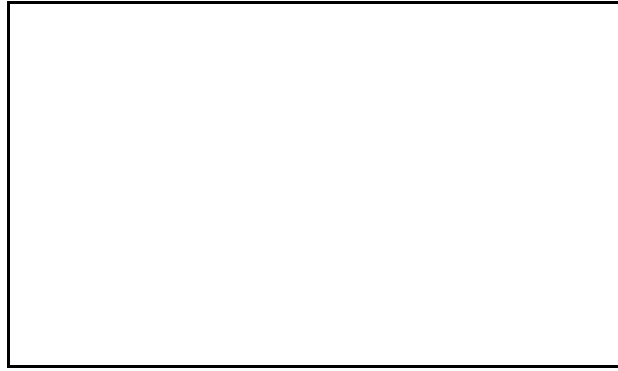


Fig. 1-5: Gráfica de la ecn. 1.12 usando $\alpha = 1; l = 10$

aproximación proporcional a ΔX^2 sin embargo el resultado no es completamente satisfactorio, como puede observarse en la figura 1.6. Esto se debe a que el error en la aproximación no solo es proporcional al espacio de la malla ΔX , sino también al valor de la derivada en el punto de evaluación, y en este caso la derivada aumenta muy rapido.El espacio utilizado es $\Delta X = 0.625$ con los valores $\beta = 10, \alpha = 1$ y $l = 10$ (la malla consta de 15 nodos internos).Podemos observar que la diferencia entre la solución exacta y nuestra aproximación es mayor en tanto más cerca de $X = 0$ nos encontramos.

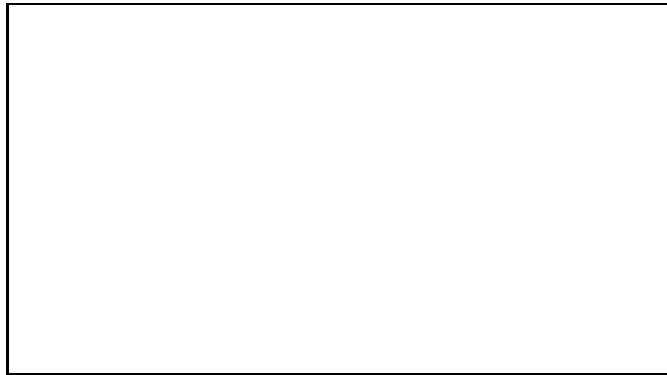


Fig. 1-6: * =Aproximación en una malla uniforme – =Solución exacta con $\beta = 10$

Utilizar una malla más fina (aumentar el numero de nodos) nos llevará sin duda a una mejor aproximación, sin embargo el problema seria entonces la dimensión del sistema algebraico que debe ser resuelto, ésta aumenta de acuerdo con el número de puntos de la malla, por lo que es

deseable mantener el número puntos de la malla lo más pequeño posible.

Como ya mencionamos el error más grande se comete cerca de $X = 0$, por lo que en realidad nos interesa solo tener una malla más fina en esa zona, es decir una malla cuyo espacio no sea constante pero que acumule más puntos en la zona donde la solución tiene un cambio muy rápido.

Basándonos en el análisis del error, consideraremos ahora una malla con 17 nodos cuya localización esta dada por una progresión geométrica de la forma:

$$\rho(X_i) = \rho_i \equiv \frac{\nabla X_i}{\Delta X_i} \equiv \frac{X_i - X_{i-1}}{X_{i+1} - X_i} \quad (1.17)$$

Tomando $\rho(X) = cte. < 1$ para toda X , obtenemos una malla de 15 nodos internos que se acumulan cerca de $X = 0$.

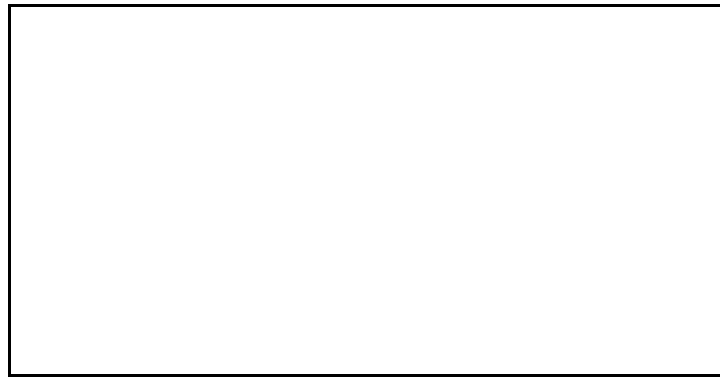


Fig. 1-7: Malla generada por la progresión geométrica 1.13, usando $\rho = 0.7$

Por supuesto el error es proporcional a

$$\Delta X_{\max} = \max_{i=1 \dots N} (\Delta X_i)$$

ya que la malla no es uniforme, sin embargo la solución mejoró notablemente, como puede verse en la figura 1.7 .

Este es un ejemplo de como una distribución de nodos adecuada puede conducirnos a un mejor resultado a pesar de que el error aparentemente sea mayor.



Fig. 1-8: * =Aproximación en una malla geometrica - =Solución exacta usando $\beta = 10$

1.2.1.1 Valor óptimo de ρ

El valor de ρ utilizado anteriormente nos condujo a una mejor aproximación para el caso particular en que $l = 10$, $\beta = 10$ y el número de nodos es $n = 17$, nuestro interés ahora es saber si es posible determinar un valor de ρ adecuado si cambiamos los parámetros en la ecuación.

Si aplicamos la regla (1.14) al caso particular de $K(X) = \alpha + \beta X$ tenemos

$$\kappa(X) = \frac{2q\beta^2}{(\alpha + \beta X)^2}$$

con

$$q = \frac{\beta}{\ln\left(\frac{\alpha + \beta l}{\alpha}\right)}$$

Por lo que

$$\rho_i \equiv \frac{\nabla X_i}{\Delta X_i} = \frac{\alpha + \beta X_{i-\frac{1}{2}}}{\alpha + \beta X_{i+\frac{1}{2}}} = \frac{\alpha + \beta(X_i - \frac{\nabla X_i}{2})}{\alpha + \beta(X_i + \frac{\Delta X_i}{2})} \quad (1.18)$$

sustituyendo ∇X_i por $\rho_i \Delta X_i$ y simplificando tenemos:

$$\rho_i = \frac{\alpha + \beta X_i}{\alpha + \beta X_{i+1}} \quad (1.19)$$

Aunque la ecuación (1.19) esta dada en términos de X_i y de X_{i+1} en realidad ρ_i es constante para toda i , situación que demostraremos a continuación.

Consideremos la figura 1.9:

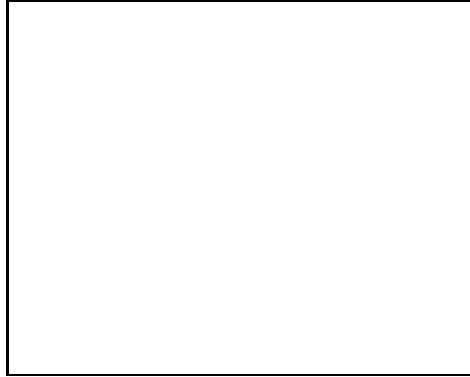


Fig. 1-9:

Observemos que por semejanza de triángulos se tiene:

$$\frac{\nabla X_{i+1}}{\Delta X_{i+1}} \equiv \rho_{i+1} = \frac{a_1}{b_1} \quad (1.20)$$

además por (1.19)

$$\rho_{i+1} \equiv \frac{b}{c} = \frac{a + a_1}{b + b_1} \quad (1.21)$$

es decir debe cumplirse:

$$\rho_{i+1} = \frac{a + a_1}{b + b_1} = \frac{a_1}{b_1}$$

al despejar la segunda igualdad:

$$(a + a_1) b_1 = (b + b_1) a_1$$

y de aquí:

$$\frac{a}{b} = \frac{a_1}{b_1}$$

por lo tanto:

$$\rho_{i+1} = \frac{a}{b} \equiv \rho_i$$

Así pues tenemos que ρ_i es constante.

Finalmente debemos determinar el valor constante ρ que debemos utilizar para obtener los resultados deseados.

Supongamos que deseamos aproximar la solución en $N - 1$ puntos internos del intervalo $[0, l]$, es decir deseamos generar una malla geométrica de $N + 1$ puntos.

Para X_{N-1} por (1.19) debe cumplirse :

$$\rho = \frac{\alpha + \beta(l - \Delta X_{N-1})}{\alpha + \beta l} \quad (1.22)$$

Por otro lado tenemos de acuerdo con (1.17) y de la definición de ΔX_i y ∇X_i :

$$\begin{aligned} \Delta X_0 &= \nabla X_1 \equiv \rho \Delta X_1 \\ \Delta X_0 &= \rho \Delta X_1 = \rho^2 \Delta X_2 = \dots = \rho^{N-1} \Delta X_{N-1} \end{aligned}$$

La suma de las ΔX_i debe ser igual al valor extremo del intervalo, es decir:

$$\sum_{i=0}^{N-1} \Delta X_i \equiv \sum_{i=0}^{N-1} \rho^i \Delta X_{N-1} \equiv l$$

La suma anterior puede ser evaluada explícitamente, con lo que tenemos:

$$\frac{1 - \rho^N}{1 - \rho} \Delta X_{N-1} = l \quad (1.23)$$

Despejando ΔX_{N-1} en (1.22)

$$\Delta X_{N-1} = \frac{(\alpha + \beta l)(1 - \rho)}{\beta}$$

sustituyendo en (1.23) y desarrollando

$$\rho = \left[1 - \frac{\beta l}{\alpha + \beta l} \right]^{\frac{1}{N}}$$

de esta manera el valor de ρ esta determinado por los coeficientes de $K(X)$, el intervalo de trabajo y el numero de nodos en los que deseamos aproximar la ecuación.

1.2.1.2 Generación numérica de una malla geométrica

Para generar una malla de $N - 1$ puntos internos sobre el intervalo $[a, b]$ de acuerdo con la regla (1.17) debemos resolver un sistema de ecuaciones algebraicas el cual esta dado por

$$X_i - X_{i-1} = \rho(X_{i+1} - X_i)$$

o bien

$$\rho X_{i+1} - (1 + \rho)X_i + X_{i-1} = 0 \quad 1 \leq i \leq N - 1 \quad (1.24)$$

bajo las condiciones

$$X_0 = a \quad X_N = b$$

El sistema completo esta dado en forma matricial de la siguiente manera:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

donde:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -(1+\rho) & \rho & & & & \\ & 1 & -(1+\rho) & \rho & & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ & & & 1 & -(1+\rho) & \rho \\ & & & & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & & & 1 & -(1+\rho) & \rho \\ & & & & & & 1 & -(1+\rho) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x} = [X_1, X_2, \dots, X_{N-1}]^t$$

$$\mathbf{b} = [a, 0, \dots, 0, \rho b]^t$$

1.2.1.3 Generalización de la malla geométrica al caso continuo

Ahora si consideramos a X como una función de $\xi \in [0, 1]$ podemos realizar el siguiente análisis:

La ecuación (1.24) puede ser escrita como:

$$X_{i+1} - 2X_i + X_{i-1} = (1 - \rho)(X_{i+1} - X_i)$$

Para generar una malla de $N - 1$ nodos se tiene $\Delta\xi = \frac{1}{N}$, y al dividir ambos lados de la ecuación por $\Delta\xi^2$, tenemos:

$$\frac{X_{i+1} - 2X_i + X_{i-1}}{\Delta\xi^2} = \frac{(1 - \rho)(X_{i+1} - X_i)}{\Delta\xi} \quad (1.25)$$

Observemos que si tomamos el limite con $\Delta\xi \rightarrow 0$ la primera parte de la ecuación será la segunda derivada ($X_{\xi\xi}$) mientras que el segundo factor del lado derecho será la primera derivada (X_ξ), sin embargo el coeficiente $\frac{(1-\rho)}{\Delta\xi}$ crecerá a ∞ .

De lo anterior tenemos que la ecuación (1.25) para una $\Delta\xi$ fija (es decir una malla de $N - 1$

nodos) representa una aproximación a la ecuación:

$$X_{\xi\xi} - \lambda_N X_\xi = 0 \quad \lambda_N = \frac{(1-\rho)}{\Delta\xi} = (1-\rho)N \quad (1.26)$$

Para nuestro caso particular la ecuación (1.26) estará sujeta a las condiciones de frontera:

$$X(0) = 0 \quad X(1) = 10 \quad \text{con } \lambda_N = 5.1$$

Así, la función de distribución de una malla geométrica es la solución a una ecuación diferencial con condiciones de Dirichlet.

Es decir que el problema discreto de generar una malla por medio de una progresión geométrica puede ser visto en forma continua como la solución de una ecuación diferencial de segundo orden.

1.2.2 Conclusiones

Las mallas generadas por este método tienen la particularidad de acumular puntos en uno de los extremos del intervalo de trabajo $[a, b]$, dicho extremo dependerá del valor de ρ , así si $\rho > 1$ los puntos se acumularán cerca de b y para $\rho < 1$ lo harán cerca de a . El caso $\rho = 1$ corresponde a la malla uniforme sobre $[a, b]$.

Una desventaja de este método es que si variamos el número de nodos de la malla estaremos cambiando la ecuación diferencial correspondiente en el caso continuo, así pues realmente estamos trabajando con una familia de ecuaciones diferenciales.

En general cuando la solución tiene zonas con un rápido cambio, es recomendable utilizar esquemas de orden menor con una distribución no constante.

1.3 GENERACION CON CONTROL DEL ESPACIO DE MALLA

Existen diversos métodos para generar mallas en una línea, nuestro interés se centra en aquellos que pueden ser extendidos a otras dimensiones.

El siguiente método de generación de mallas que estudiaremos tiene una motivación geométrica muy simple, la cual nos conducirá a una ecuación diferencial de segundo grado.

El problema consiste en generar una malla sobre el intervalo $[a, b]$ de tal manera que el espacio de malla, es decir la longitud de los intervalos $[X_i, X_{i+1}]$, sea proporcional al valor $\Delta\xi_i = \xi_{i+1} - \xi_i$ y a una función $\Phi(\xi)$, evaluada en el punto medio del intervalo $[\xi_i, \xi_{i+1}]$, de una malla uniforme en el espacio lógico $[0, 1]$, más precisamente, hallar una distribución de puntos X_i sobre el espacio físico $[a, b]$ con $X_0=a, X_m=b$ tal que se cumpla:

$$X_{i+1} - X_i = K(\xi_{i+1} - \xi_i)\Phi\left(\frac{\xi_{i+1} + \xi_i}{2}\right) \quad (1.27)$$

donde K es una constante por determinar mayor que cero, además $\xi_i = \frac{i}{m}$ con $i=0, \dots, m-1$.

Claramente $\Phi(\xi)$ debe ser positiva pues la longitud de los intervalos $[X_i, X_{i+1}]$, debe ser mayor que cero.

Para resolver el problema consideraremos que la malla esta dada por una transformación del espacio lógico en el espacio físico, así tenemos que $X = X(\xi)$ y cada X_i estará dada por el valor de X en el punto ξ_i es decir, $X_i = X(\xi_i)$, ahora bien si X es continua, para $\Delta\xi$ suficientemente cerca de cero se tendrá que $X_{i+1} - X_i$ es cercano a cero, sin embargo $\Phi(\xi_{i+\frac{1}{2}})$ no lo es, así pues al dividir la expresión (1.27) por $\Delta\xi$ tenemos :

$$\frac{X(\xi_{i+1}) - X(\xi_i)}{\Delta\xi} = K\Phi(\xi_{i+\frac{1}{2}}) \quad (1.28)$$

esta ecuación puede expresarse para todo punto ξ en $[0, 1]$ como:

$$\frac{X(\xi + \Delta\xi) - X(\xi)}{\Delta\xi} = K\Phi\left(\xi + \frac{\Delta\xi}{2}\right) \quad (1.29)$$

Al considerar la transformación $X(\xi)$ continua el limite en la ultima ecuación nos lleva a la ecuación diferencial ordinaria

$$X_\xi(\xi) = K\Phi(\xi) \quad (1.30)$$

al dividir por Φ y derivar respecto de ξ tenemos:

$$\left(\frac{X_\xi(\xi)}{\Phi(\xi)} \right)_\xi = 0 \quad (1.31)$$

Observemos que en la ultima expresión la constante K , ha sido removida de la ecuación así que no es necesario conocerla para resolver el problema original.

Si Φ es diferenciable y X es dos veces diferenciable entonces, usando la regla del cociente podemos escribir la ecuación (1.31) así:

$$X_{\xi\xi} - \frac{\Phi_\xi}{\Phi} X_\xi = 0 \quad (1.32)$$

para cualquiera de las ecuaciones anteriores las condiciones de frontera están dadas por:

$$X(0) = X_0 = a; X(1) = X_m = b \quad (1.33)$$

Estas condiciones de frontera y la ecuación diferencial determinan de manera única a la transformación $X = X(\xi)$.

La ecuación (1.31) es una ecuación de Laplace con coeficientes variables en forma conservativa, esta no requiere de la diferenciable de la función Φ lo cual representa una ventaja sobre la forma no conservativa (1.32) pues la función de peso en ocasiones debe ser obtenida en forma numérica.

El valor de K aunque no es indispensable, en ocasiones es útil conocerlo, este puede ser calculado a partir de la ecuación (1.30) , integrando tenemos:

$$\frac{1}{K} = \frac{1}{b-a} \int_0^1 \Phi(\xi) d\xi \quad (1.34)$$

La malla más simple que puede generarse sobre el intervalo $[a, b]$ es la de puntos con distribución uniforme, dicha distribución se consigue con la transformación:

$$X(\xi) = (b - a)\xi + a \quad (1.35)$$

Si esta ecuación es diferenciada dos veces se tiene:

$$X_{\xi\xi} = 0,$$

que corresponde al caso en que $\Phi \equiv 1$ en la ecuación (1.31), el efecto de la función Φ es el de llevar los nodos a lugares específicos del espacio físico.

La solución a la ecuación (1.31) con condiciones de fronteras dadas por (1.33) es:

$$X(\xi) = a + K \int_0^\xi \Phi(u) du \quad (1.36)$$

con K dada por (1.34) .

Por otro lado si en lugar de tomar a Φ como la función de peso en la ecuación tomamos $C_0\Phi$ con C_0 una constante, la malla generada no varia, para ver esto tomemos $\Phi_0 = C_0\Phi$ y X_0 la solución correspondiente a (1.31) con Φ_0 , es decir :

$$X_0(\xi) = a + K_0 \int_0^\xi \Phi_0(u) du$$

con K_0 definida como en (1.34) .

Al sustituir los valores de K_0 y Φ_0 tenemos:

$$X_0(\xi) = a + \frac{b - a}{\int_0^1 C_0\Phi(\xi) d\xi} \int_0^\xi C_0\Phi(u) du = a + \frac{b - a}{\int_0^1 \Phi(\xi) d\xi} \int_0^\xi \Phi(u) du = X(\xi) \quad (1.37)$$

Así que ahora podemos considerar $K = 1$.

1.3.1 Funciones de control

Elegir una función de peso para la ecuación (1.31) no es en general una tarea sencilla, en esta sección se darán algunos ejemplos de funciones que pueden resultar útiles en diversos casos debido a las propiedades que cada una de ellas presenta.

1.3.1.1 Splines

Las funciones splines son de cierta utilidad como funciones de peso ya que estas al estar definidas por pedazos nos permiten controlar la malla en diferentes intervalos del espacio lógico.

Al imponer condiciones sobre las funciones que definen un spline podemos determinar el tipo de mallas que serán obtenidas, de esta manera se pueden esperar ciertos resultados específicos en la malla, así por ejemplo un spline formado por constantes, genera una malla cuya acumulación de los nodos será mayor en el intervalo donde la función de peso sea menor.

1.3.1.1.1 Splines parabólicos

Generar mallas por medio de un spline polinomial es quizá el caso más simple de estas funciones de peso, para facilitar el análisis de este caso tomaremos nuevamente como el espacio físico al intervalo $[0, 1]$ y consideraremos un spline parabólico, sin embargo la generalización resulta inmediata.

La idea es generar una malla mediante un spline parabólico, el cual deseamos tenga derivada continua (esto garantiza cierta suavidad de la malla), y de tal forma que la acumulación de nodos se realice en un punto determinado v del espacio físico.

Deseamos además establecer el porcentaje de nodos de la malla que habrán de acumularse entre 0 y v , esto es equivalente a determinar un punto ξ_0 del espacio lógico con la propiedad $X(\xi_0) = v$.

De acuerdo con la ecuación (1.36) tenemos:

$$X(\xi) = K \int_0^\xi \Phi(t) dt \quad (1.38)$$

de esto tenemos que si Φ es un spline lineal de la forma:

$$\Phi(\xi) = \begin{cases} a_1(\xi - \xi_0) + b_1 & 0 \leq \xi \leq \xi_0 \\ a_2(\xi - \xi_0) + b_2 & \xi_0 < \xi \leq 1 \end{cases} \quad (1.39)$$

X será un spline parabólico:

$$X(\xi) = \begin{cases} A_1(\xi - \xi_0)^2 + B_1(\xi - \xi_0) + C_1 & \xi \leq \xi_0 \\ A_2(\xi - \xi_0)^2 + B_2(\xi - \xi_0) + C_2 & \xi_0 > \xi \end{cases} \quad (1.40)$$

Así el problema consiste en determinar los coeficientes de Φ a partir de los datos m, v, ξ_0 , de tal forma que la solución $X(\xi)$ cumpla las condiciones establecidas.

Ahora bien, deseamos que X sea una función continua, al igual que su derivada, lo cual establece las condiciones:

$$\begin{aligned} C_1 &= C_2 = X(\xi_0) = v \\ B_1 &= B_2 = X_\xi(\xi_0) = m \end{aligned} \quad (1.41)$$

Por lo que X toma la forma:

$$X(\xi) = \begin{cases} A_1(\xi - \xi_0)^2 + m(\xi - \xi_0) + v & \xi \leq \xi_0 \\ A_2(\xi - \xi_0)^2 + m(\xi - \xi_0) + v & \xi_0 > \xi \end{cases} \quad (1.42)$$

Geoméricamente v es el punto de unión de las parábolas y m es la pendiente con la cual se unen.

Finalmente de las condiciones de frontera $X(0) = 0$, $X(1) = 1$ tenemos:

$$A_1 = \frac{m\xi_0 - v}{\xi_0^2} \quad A_2 = \frac{m(1 - \xi_0) + (1 - v)}{(1 - \xi_0)^2}$$

Por otro lado, de (1.38) tenemos que:

$$X_\xi = K\Phi$$

es decir:

$$\begin{aligned} A_1 &= K\frac{a_1}{2} & B_1 &= Kb_1 \\ A_2 &= K\frac{a_2}{2} & B_2 &= Kb_2 \end{aligned} \quad (1.43)$$

Esto nos indica que $b_1 = b_2 = \frac{m}{K}$.

Por lo que la función Φ que produce el spline buscado será:

$$\Phi(\xi) = \begin{cases} \frac{2}{K} \frac{m\xi_0 - v}{\xi_0^2} (\xi - \xi_0) + \frac{m}{K} & \xi \leq \xi_0 \\ \frac{2}{K} \frac{m(1-\xi_0) + (1-v)}{(1-\xi_0)^2} (\xi - \xi_0) + \frac{m}{K} & \xi_0 < \xi \end{cases} \quad (1.44)$$

Recordemos que si Φ es multiplicada por una constante la solución no varía por lo que la constante K puede eliminarse en la última expresión, así que Φ está completamente determinada a partir de los datos iniciales v, m y ξ_0 .

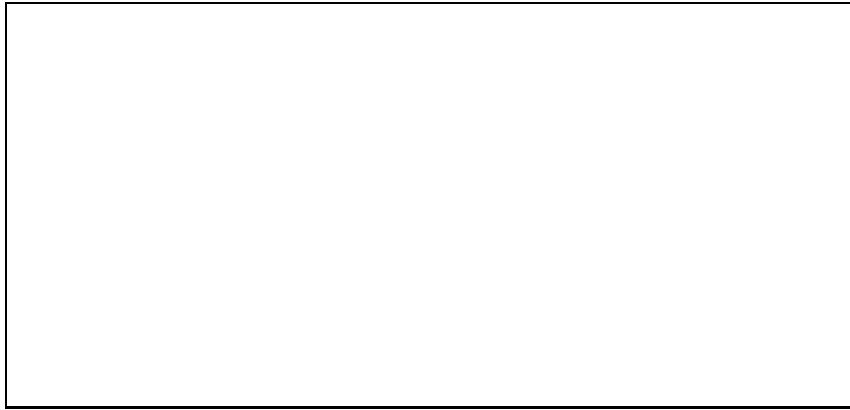


Fig. 1-10: $\Phi = \begin{cases} -2(\xi - .5) + .3 & 0 \leq \xi \leq .3 \\ 3.6(\xi - .5) + .3 & .3 < \xi \leq 1 \end{cases}$

En la figura (1 - 10) tenemos $v = .4$; $\xi_0 = .5$; $m = .3$.

Finalmente la condición $\Phi > 0$ para toda ξ , nos lleva a la restricción $0 < m < 2 \min(m_1, m_2)$.
con $m_1 = \frac{v}{\xi_0}$ y $m_2 = \frac{1-v}{1-\xi_0}$.

1.3.1.1.1 Splines de grado n

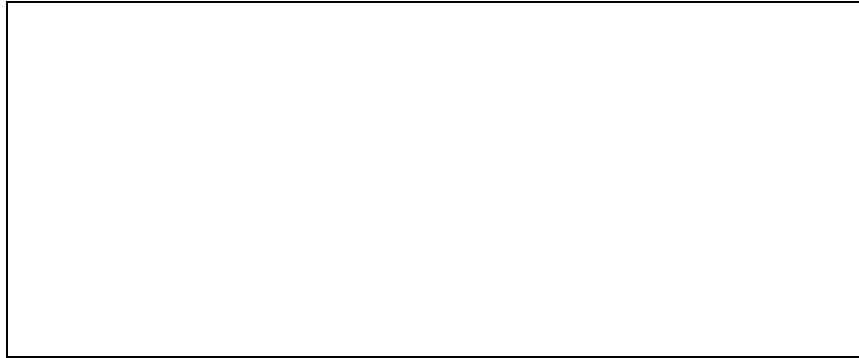
Un spline polinomial de grado n de la forma:

$$X(\xi) = \begin{cases} A_1(\xi - \xi_0)^n + m(\xi - \xi_0) + v & \xi \leq \xi_0 \\ A_2(\xi - \xi_0)^n + m(\xi - \xi_0) + v & \xi_0 > \xi \end{cases} \quad (1.45)$$

puede ser producido a partir de los mismos datos por medio de la función de peso:

$$\Phi(\xi) = \begin{cases} n \frac{m\xi_0 - v}{(-\xi_0)^n} (\xi - \xi_0)^{n-1} + m & \xi \leq \xi_0 \\ n \frac{m(1-\xi_0) + (1-v)}{(1-\xi_0)^n} (\xi - \xi_0)^{n-1} + m & \xi_0 > \xi \end{cases} \quad (1.46)$$

donde $0 < m < \frac{n}{n-1} \min(m_1, m_2)$.



$$\text{Fig. 1-11: } \Phi = \begin{cases} 37.3(\xi - .6)^4 + .2 & 0 \leq \xi \leq .6 \\ 107.4(\xi - .6)^4 + .2 & .6 < \xi \leq 1 \end{cases}$$

Tomando $v = .7$; $\xi_0 = .6$; $m = .2$ podemos generar la malla ilustrada en la figura (1 - 11).

La principal ventaja de usar polinómios de grado mayor es que la malla es más suave, pues ésta tendrá $n - 1$ derivadas continuas.

1.3.1.2 La exponencial y las funciones trigonométricas hiperbólicas

La exponencial como función de peso garantiza suavidad en la malla generada, además pueden obtenerse una gran variedad de funciones de control a partir de ella (las funciones trigonométricas hiperbólicas son definidas a partir de la exponencial), cada una con propiedades particulares cuya utilidad depende del problema en cuestión.

1.3.1.2.1 La exponencial simple

Tomemos como función de peso:

$$\Phi = \exp(\lambda\xi) \quad (1.47)$$

así la ecuación (1.31) toma la forma:

$$\left(\frac{X_\xi(\xi)}{\exp(\lambda\xi)} \right)_\xi = 0 \quad (1.48)$$

y al derivar y reducir términos se tiene:

$$X_{\xi\xi} - \lambda X_\xi = 0 \quad (1.49)$$

Esta ecuación corresponde a la generación de mallas por progresión geométrica vista anteriormente (ecuación (1.26)), sin embargo ahora el coeficiente λ no depende del número de nodos de la malla por lo tanto ahora podemos variar el número de nodos sin cambiar la ecuación diferencial.

La solución general a la ecuación (1.49) es:

$$X(\xi) = K_0 \exp(\lambda\xi) + K_1 \quad (1.50)$$

donde K_0 y K_1 son constantes que dependen de las condiciones de frontera.

Si el espacio físico es el mismo intervalo $[0, 1]$ tenemos que X es una transformación del $[0, 1]$ en si mismo dada por:

$$X(\xi) = \frac{\exp(\lambda\xi) - 1}{\exp(\lambda) - 1} \quad (1.51)$$

Las mallas generadas por esta transformación tienen la particularidad de acumular nodos en uno de los extremos del intervalo, esto era de esperarse debido a su similitud con la progresión geométrica, en la cual el extremo de acumulación se determinaba considerando si el parámetro ρ era mayor o menor que uno, algo similar sucede con λ pues si $\lambda > 0$ los puntos se acumularán cerca de cero, mientras que si $\lambda < 0$ los puntos se acumularan cerca de uno.

Esta propiedad se conserva al tomar cualquier otro intervalo $[a, b]$ como el espacio físico.

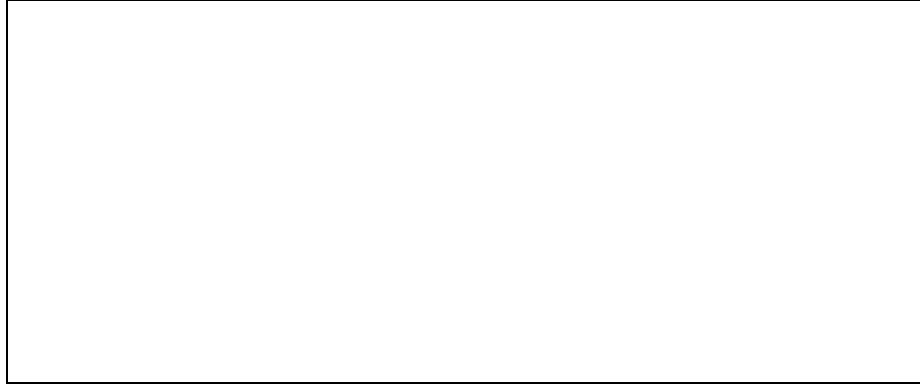


Fig. 1-12: $\Phi = \exp(3\xi)$

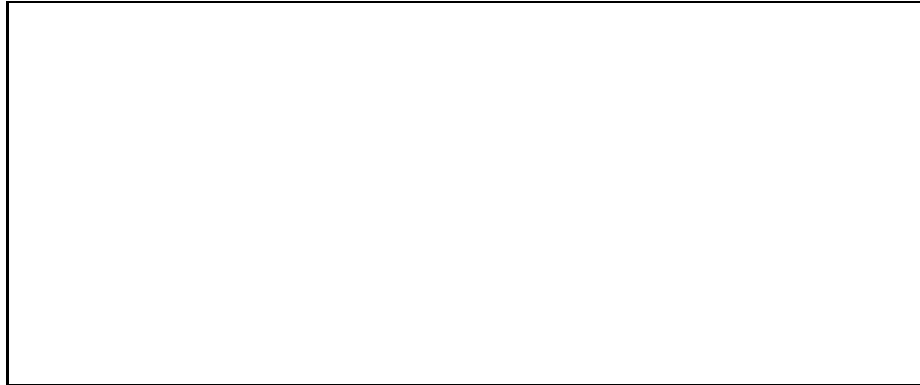


Fig. 1-13: $\Phi = \exp(-5\xi)$

1.3.1.2.2 La exponencial con valor absoluto

Consideremos ahora como función de peso a la función exponencial:

$$\Phi(\xi) = \exp(\lambda |\xi - \xi_0|) \quad (1.52)$$

donde

$$\lambda > 0 \quad \xi_0 \in [0, 1]$$

Las mallas generadas por esta función de peso tendrán una acumulación de nodos cerca de la imagen de ξ_0 , esta acumulación será mayor o menor dependiendo del valor de λ .

La principal ventaja de esta función es la suavidad obtenida a partir de la exponencial, lo cual representa una ventaja sobre el caso polinomial, en el cual también se acumulan nodos cerca de la imagen de ξ_0 , sin embargo ahora dicha imagen, no puede ser determinada con la misma facilidad, así pues no conocemos en principio el punto v sobre el espacio físico en el cual se juntarán los nodos.

La solución analítica de (1.31) con (1.52) sobre el intervalo $[a, b]$ es:

$$X(\xi) = \frac{1}{\lambda} \begin{cases} -\exp(\lambda(\xi_0 - \xi)) + \exp(\lambda\xi_0) + \lambda a & 0 \leq \xi \leq \xi_0 \\ \exp(\lambda(\xi - \xi_0)) - \exp(\lambda(1 - \xi_0)) + \lambda b & \xi_0 < \xi \leq 1 \end{cases}$$

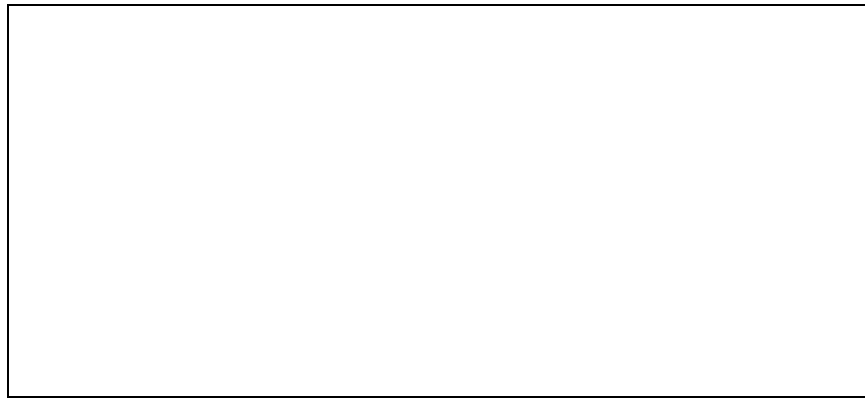


Fig. 1-14: $\Phi = \exp(5 |\xi - .3|)$

1.3.1.2.3 El coseno hiperbólico

$$\Phi = \cosh(\lambda\xi)$$

La solución analítica en el intervalo $[0, 1]$ es:

$$X(\xi) = \frac{\sinh(\lambda\xi)}{\sinh(\lambda)}$$

Las mallas generadas a partir de esta función acumulan los nodos cerca del punto $X = 0$.

A diferencia de la exponencial simple ahora el signo de λ no afecta a la malla generada.



Fig. 1-15: $\Phi = \cosh(4.2\xi)$

1.3.1.2.4 La secante hiperbólica

$$\Phi = (\operatorname{sech}(3\xi))^2$$

Tenemos ahora:

$$X(\xi) = \frac{\tanh(\lambda\xi)}{\tanh(\lambda)}$$

La función es suave, los nodos se acumulan cerca de $X = 1$, las mallas son muy similares al caso de la exponencial simple con $\lambda < 0$, pero como en el caso anterior el signo de λ no afectará las mallas generadas.

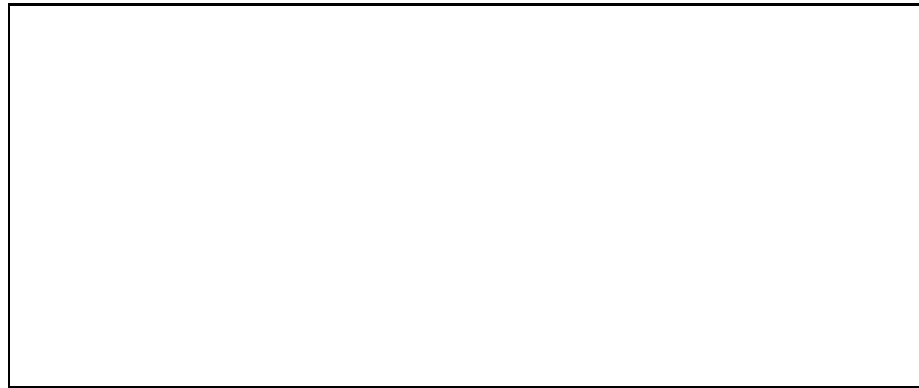


Fig. 1-16: $\Phi = \operatorname{sech}^2(3\xi)$

De los casos vistos podemos concluir que mallas similares pueden ser obtenidas con funciones diferentes, las características particulares de cada una de ellas en general determinaran que función utilizar al resolver un problema específico, sin embargo un criterio general para decidir que función es mejor consiste en analizar el error que se comete con cada una.

Surge ahora el problema de obtener p puntos en el espacio físico donde se acumulen los nodos de la malla, estos puntos corresponden a las imágenes de los valores de ξ en los cuales la función de peso es cercana a cero, por lo que necesitamos una Φ tal que $\Phi(\xi_i) \approx 0$ para $i = 1, \dots, p$.

Existen diversas opciones para conseguir el efecto deseado sobre la malla, entre ellas podemos mencionar polinómios de grado p , o bien las funciones trigonométricas seno y coseno, con estas últimas los puntos se acumulan de manera periódica.

Una forma en que las funciones trigonométricas pueden ser implementadas es:

$$\Phi = \cos(p\pi\xi)^2 + m$$

El valor de p determina el número de puntos sobre los que habrán de acumularse los nodos de la malla mientras que el valor de m determina la separación que tendrán dichos nodos.

Al usar el coseno como función de peso los nodos se acumularán en p nodos internos del intervalo $[a, b]$ mientras que el seno acumulará puntos en $p - 1$ nodos internos y en los extremos del intervalo.

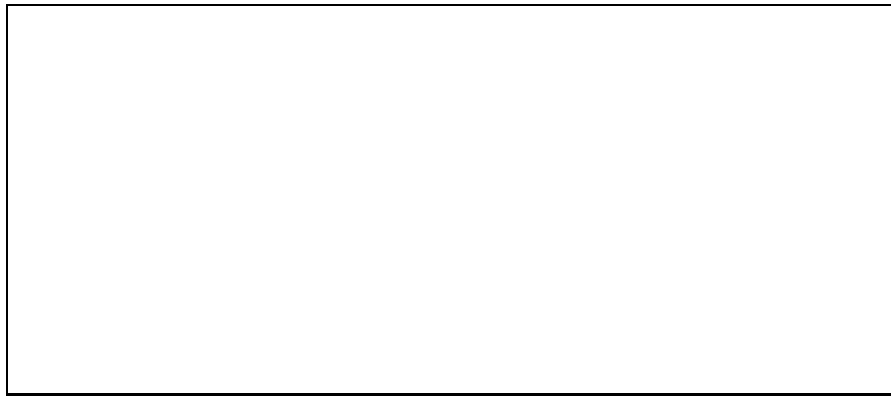


Fig. 1-17: $\Phi = \cos(3\pi\xi)^2 + .1$



Fig. 1-18: $\Phi = \text{sen}(4\pi\xi)^2 + .3$

1.3.2 Función de peso en el espacio físico

La principal limitación de éste método consiste en que dada una función de peso no conocemos el punto del espacio físico en el cuál se efectuará el cambio de distribución de los puntos de malla, más claramente, si deseamos acumular puntos de la malla cerca de un punto X_0 del espacio físico resultará muy complicado o incluso imposible determinar el punto ξ_0 del espacio lógico en el cual se llevará el cambio de la función Φ .

Una manera de resolver éste problema es utilizar funciones de peso definidas en el espacio físico, esta situación será descrita ahora.

Una función en el espacio físico depende de la variable dependiente X . Suponemos que la función de peso esta dada por $W = W(X) > 0$, la cual esta definida en el intervalo $[a, b]$, al igual que antes el problema es generar una malla cuyas longitudes de intervalo $[X_i, X_{i+1}]$ sean proporcionales al valor de la función $W(X)$ en el punto medio del intervalo $[X_i, X_{i+1}]$, es decir, hallar una distribución de puntos X_i con $i = 0, 1, \dots, m$, que cumpla con la condición:

$$X_{i+1} - X_i = K(\xi_{i+1} - \xi_i)W\left(\frac{X_{i+1} + X_i}{2}\right) \quad (1.53)$$

con K alguna constante por determinar.

De manera análoga al caso anterior tomando $\Phi(\xi) = W(X(\xi))$ podemos llegar a la ecuación:

$$\left(\frac{X_\xi(\xi)}{W(X(\xi))} \right)_\xi = 0 \quad (1.54)$$

tomando en cuenta que:

$$W_\xi = W_X X_\xi$$

mediante las reglas de diferenciación podemos llevar esta ecuación a la forma:

$$X_{\xi\xi} - \frac{W_\xi}{W} X_\xi = 0 \quad (1.55)$$

Las condiciones de frontera para esta ecuación son $X(0) = a$, $X(1) = b$, así pues tenemos las condiciones necesarias para resolver el problema y generar la malla. Es importante observar que la ecuación (1.54) es similar a la ecuación (1.31), sin embargo ésta es lineal mientras que la primera no lo es, puesto que el coeficiente es una función de la variable dependiente. Una ecuación no lineal puede no tener solución o bien, no ser única.

El valor de la constante K en la ecuación (1.53) puede ser calculado mediante la identidad:

$$K \frac{d\xi}{dX} = \frac{1}{W(X)} \quad (1.56)$$

al integrar en el intervalo $[a, b]$ tenemos:

$$K = \int_a^b \frac{dX}{W(X)} \quad (1.57)$$

Debido a la no linealidad de la ecuación (1.54) la solución general no puede ser dada explícitamente, como se hizo en el caso anterior.

1.3.2.1 Funciones de control para el espacio físico

Con el fin de comparar los resultados de los dos casos de mallas con control del espacio utilizaremos nuevamente algunas de las funciones vistas anteriormente, solo que esta vez estarán evaluadas en el espacio físico.

Las mallas generadas en cada caso serán similares a las obtenidas por las funciones análogas

en el espacio lógico, pero con la ventaja de que tendremos control sobre los puntos en los cuales se llevará a cabo el cambio de distribución.

1.3.2.1.1 Splines en el espacio físico

$$W(X) = \begin{cases} a_1 & 0 \leq X \leq X_0 \\ a_2 & X_0 < X \leq 1 \end{cases}$$

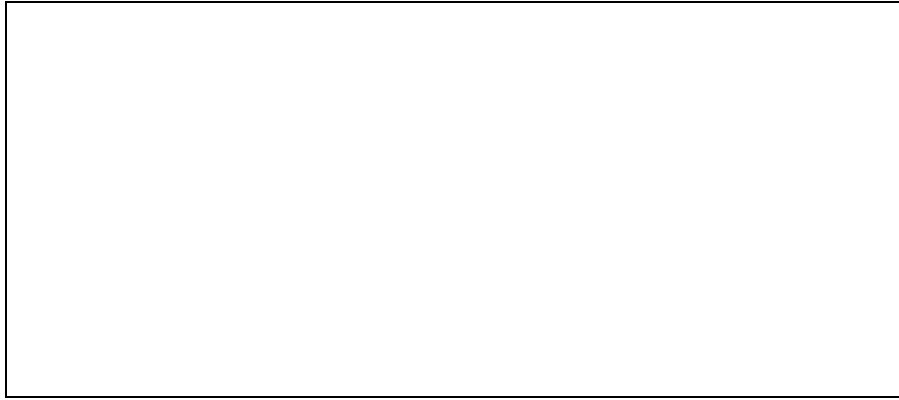


Fig. 1-19: $\Phi(\xi) = \begin{cases} 1 & 0 \leq X \leq .4 \\ 2 & .4 < X \leq 1 \end{cases}$

$$W(X) = \begin{cases} a_1(X - X_0) + b_1 & 0 \leq X \leq X_0 \\ a_2(X - X_0) + b_1 & X_0 < X \leq 1 \end{cases}$$

1.3.2.1.2 La exponencial

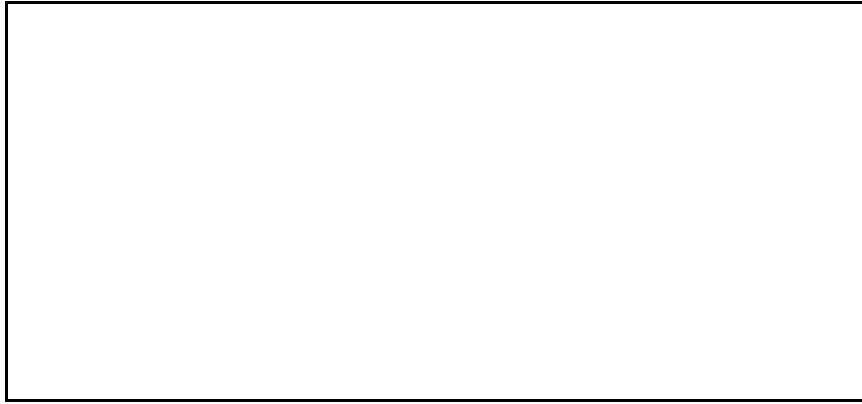


Fig. 1-20: $W(X) = \begin{cases} -2(X - .4) + .3 & 0 \leq X \leq .4 \\ 3.6(X - .4) + .3 & .4 < X \leq 1 \end{cases}$

$$W(X) = \exp(\lambda |X - X_0|)$$



Fig. 1-21: $W(X) = \exp(2 |X - .5|)$

1.3.2.1.3 El valor absoluto

$$W(X) = \begin{cases} |X - X_1| + m_1 & 0 \leq X \leq .X_0 \\ |X - X_2| + m_2 & X_0 \leq X \leq .1 \end{cases}$$

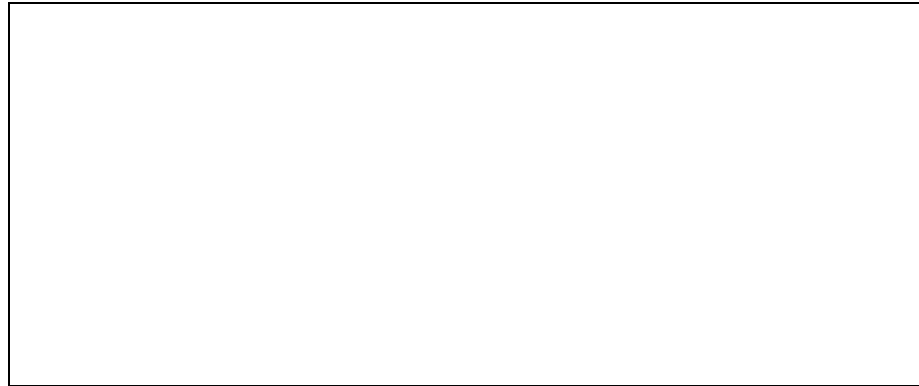


Fig. 1-22: $W(X) = \begin{cases} |X - .2| + .1 & 0 \leq X \leq .5 \\ |X - .8| + .1 & .5 < X \leq 1 \end{cases}$

Al comparar los resultados obtenidos podemos ver que existe una gran similitud en las mallas generadas por una misma función evaluada en el espacio lógico y en el espacio físico.

Ahora podemos dar algunas conclusiones: es posible generar mallas sobre una línea cuyo espacio entre dos nodos consecutivos sea proporcional al valor de una función de peso dada, ya sea en el espacio lógico o en el espacio físico, obteniendo en el primer caso una ecuación lineal pero con la desventaja de que la función de peso es difícil de construir, mientras que en el segundo caso la función de peso es muy sencilla de obtener, pero la ecuación resulta ser no lineal.

1.4 GENERADORES DE MALLAS DE POISSON

Las ecuaciones de Poisson son comúnmente utilizadas para generar mallas en dimensiones superiores, por esta razón veremos sus propiedades básicas en una dimensión.

Los generadores de Poisson tienen dos formas, la primera es conocida como generador AH y la segunda como generador TTM.

Una malla es obtenida asumiendo que la transformación satisface una ecuación diferencial de segundo orden, conocida como ecuación de Poisson, la razón de esto es que las soluciones a dichas ecuaciones son suaves, lo cual es una propiedad muy deseable en las mallas.

1.4.1 El generador AH

El generador AH asume que la transformación satisface la ecuación:

$$X_{\xi\xi} = P(\xi) \quad X(0) = a \quad X(1) = b \quad (1.58)$$

donde $P(\xi)$ es una función continua dada, la cual sirve como control de la malla. Este es un problema lineal de valores en la frontera el cual tiene como solución general:

$$X(\xi) = (b - a)\xi + a - \xi \int_{\xi}^1 P(\tau) d\tau + \xi \int_0^1 \tau P(\tau) d\tau - \int_0^{\xi} \tau P(\tau) d\tau \quad (1.59)$$

Las ecuaciones 3.5 y 1.59 indican que $X(\xi)$ y su primera derivada son continuas, es más éstas son continuas aún cuando $P(\xi)$ sea continua solo por trozos, es decir, $X(\xi)$ es más suave que $P(\xi)$. Esto es un punto muy importante de los generadores de Poisson pues es de hecho la razón por la cual resultan de gran utilidad.

La derivada de 1.59 es:

$$X_{\xi} = (b - a) - \int_{\xi}^1 P(\tau) d\tau + \int_0^1 \tau P(\tau) d\tau \quad (1.60)$$

Esta expresión ilustra la mayor dificultad de éste generador: digamos que la relación entre la función de peso y su derivada no es trivial así pues el simple hecho de que $P(\xi)$ sea positiva

no garantiza que la derivada sea distinta de cero (para dimensiones superiores la derivada será sustituida por el jacobiano de la transformación).

Introducir una función de peso en el espacio físico no garantiza un mayor control de éste problema.

El generador AH puede llevarse a cualquiera de los generadores vistos anteriormente (ecuación (1.31) y (1.54)) tomando la función $P(\xi)$ de tal manera que se cumpla una de las siguientes ecuaciones:

$$P(\xi) = \frac{\Phi_\xi}{\Phi} X_\xi \quad P(X) = \frac{W_X}{W} (X_\xi)^2 \quad (1.61)$$

Ejemplos

$$P(\xi) = \begin{cases} a_1 & 0 \leq X \leq X_0 \\ a_2 & X_0 \leq X \leq 1 \end{cases}$$

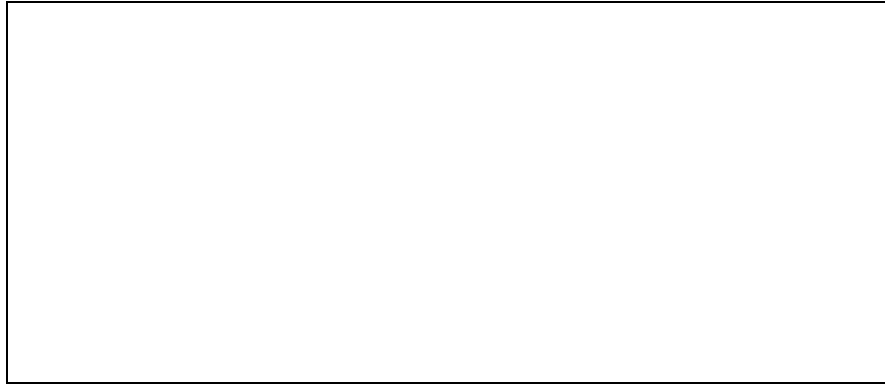


Fig. 1-23: $P(\xi) = \begin{cases} -2 & 0 \leq X \leq .5 \\ 3.6 & .5 \leq X \leq 1 \end{cases}$

$$P(\xi) = \begin{cases} -\frac{\lambda}{A_0^2} \exp(2\lambda(X - X_0)) & 0 \leq X \leq X_0 \\ \frac{\lambda}{A_0^2} \exp(-2\lambda(X - X_0)) & X < X_0 \leq 1 \end{cases}$$



Fig. 1-24: $P(\xi) = \begin{cases} -\frac{1}{3} \exp(2(X - .3)) & 0 \leq X \leq .3 \\ \frac{1}{3} \exp(-2(X - .3)) & .3 \leq X \leq 1 \end{cases}$

$$P(\xi) = \cosh(\lambda\xi)$$



Fig. 1-25: $P(\xi) = \cosh(3\xi)$

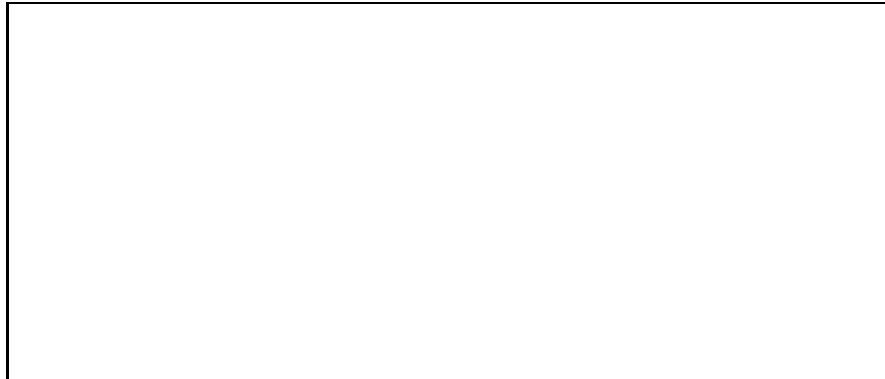


Fig. 1-26: $P(\xi) = -\cosh(1.5\xi)$

1.4.2 El generador TTM

Para el generador TTM la idea básica es considerar la función inversa $\xi(X)$ y asumir que esta satisface la ecuación de Poisson con condiciones de frontera:

$$\xi_{xx}(X) = P(\xi) \quad \xi(a) = 0 \quad \xi(b) = 1 \quad (1.62)$$

donde $P(\xi)$ es una función continua dada.

Observemos que $X(\xi(X)) = X$ puesto que X y ξ son funciones inversas, así al diferenciar respecto de X tenemos $X_\xi \xi_X = 1$ o bien $\xi_X = \frac{1}{X_\xi}$ y por regla de la cadena tenemos:

$$\xi_{xx} = \frac{1}{X_\xi} \left(\frac{1}{X_\xi} \right)_\xi = -\frac{X_{\xi\xi}}{(X_\xi)^3} \quad (1.63)$$

Esta expresión puede usarse para transformar la ecuación (1.62) en el problema no lineal de valores en la frontera :

$$X_{\xi\xi} + P(\xi)(X_\xi)^3 = 0 \quad X(0) = a \quad X(1) = b \quad (1.64)$$

Notemos que el generador TTM toma la forma de los generadores anteriores si P es tomada en alguna de las siguientes formas:

$$P(\xi)(X_\xi)^3 = -\frac{\Phi_\xi}{\Phi} X_\xi \quad P(X)(X_\xi)^3 = -\frac{W_X}{W} (X_\xi)^2 \quad (1.65)$$

Para obtener una relación con la derivada podemos integrar la ecuación (1.64) con lo que tenemos:

$$(X_\xi)^{-2} = 2 \int^\xi P(\tau) d\tau$$

con lo que podemos ver que la relación nuevamente es no trivial, sin embargo vemos que si P es continua entonces también lo son X_ξ y $X_{\xi\xi}$ es decir la transformación es dos veces diferenciable, por lo que las mallas generadas por TTM son suaves.

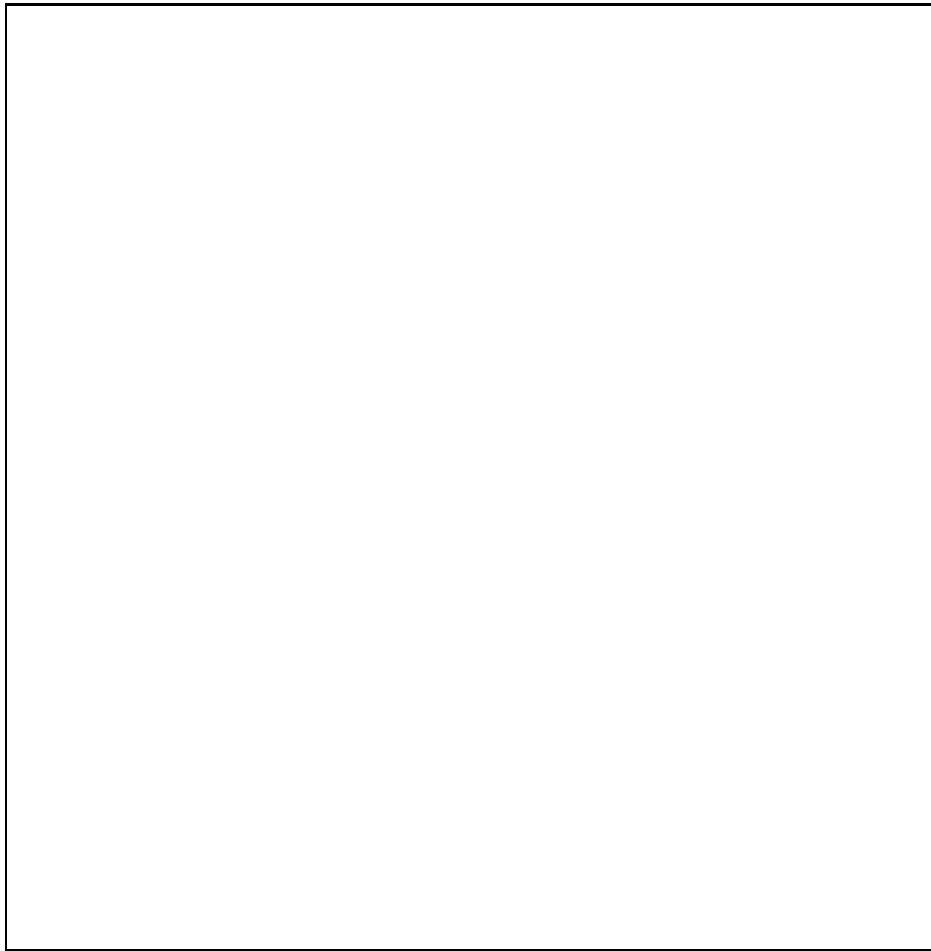


Fig. 1-27:

$$\text{(A)} \quad P(\xi) = \begin{cases} \frac{.1}{\xi^2+1} & 0 \leq \xi < .5 \\ \frac{.1}{1.5} & .5 \leq \xi < 1 \end{cases} \quad \text{(B)} \quad P(\xi) = \begin{cases} -.1 & 0 \leq \xi < .5 \\ .1 & .5 \leq \xi < 1 \end{cases}$$

1.5 TRANSFORMACION DEL PROBLEMA DE DIRICHLET.

Consideremos ahora el problema de valores a la frontera

$$(\alpha(X)F_X)_X = g, \quad F(a) = A \quad F(b) = B \quad a \leq X \leq b \quad (1.66)$$

donde a, b, A, B son números reales dados.

Asumiremos que una transformación $X = X(\xi)$ uno a uno del intervalo $[0, 1]$ al intervalo $[a, b]$ es dada.

La suposición de que la transformación es uno a uno indica que $X_\xi \neq 0$, además en caso de que $X_\xi < 0$ consideraremos la transformación $\tilde{X} = X(1 - \xi)$ para la cual se tiene $\tilde{X}_\xi = -X_\xi$, por lo que asumiremos que $X_\xi > 0$.

Las funciones α, F y g pueden considerarse como funciones de ξ al tomar

$$\alpha(\xi) = \alpha(X(\xi)) \quad F(\xi) = F(X(\xi)) \quad g(\xi) = g(X(\xi))$$

Usando la regla de la cadena y despejando tenemos

$$F_X = \frac{F_\xi}{X_\xi}$$

y aplicando esta regla a la ecuación (1.66)

$$(\alpha(X)F_X)_X = \frac{1}{X_\xi} \left(\frac{\alpha(\xi)F_\xi}{X_\xi} \right)_\xi \quad (1.67)$$

La última expresión en (1.67) es la forma simétrica de la ecuación.

Finalmente al sustituir (1.67) en (1.66) tenemos el problema transformado en forma simétrica:

$$\left(\tilde{\alpha}\tilde{F}_\xi \right)_\xi = \tilde{g} \quad \tilde{F}(0) = A \quad \tilde{F}(1) = B \quad 0 \leq \xi \leq 1$$

Donde

$$\tilde{\alpha} = \frac{\alpha}{X_\xi} \quad \tilde{F} = F \quad \tilde{g} = X_\xi g$$

Una forma alterna para la ecuación puede obtenerse al desarrollar la derivada en (1.67):

$$\frac{X_\xi (\alpha F_{\xi\xi} + \alpha_\xi F_\xi) - X_{\xi\xi} (\alpha F_\xi)}{X_\xi^3} = g$$

Esta es la forma no simétrica del problema la cual tiene un término de primer orden, esta situación se presenta también al transformar una ecuación en dimensiones superiores, en donde la derivada de la transformación X será sustituida por el jacobiano de la transformación correspondiente, el cual para el caso unidimensional esta dado precisamente por $J = X_\xi$.

Cuando una transformación cumple que $X_\xi = 0$ o $X_\xi = \infty$ se dice que es singular, esto por supuesto representa una complicación en la transformación del problema de Dirichlet, sabemos que X es inyectiva y por lo tanto $X_\xi \neq 0$, la condición de suavidad sobre X se traduce en $X_\xi \neq \infty$, por esta razón las mallas generadas se desea que sean tan suaves como sea posible.

1.6 MALLAS ADAPTIVAS

En las dos secciones precedentes se han estudiado métodos para generar mallas mediante una función de peso, tal función debe ser construida de acuerdo a la ecuación que se desea resolver, es decir, depende directamente de la ecuación que será aproximada sobre la malla.

Como ya se vio al inicio del capítulo la malla debe acumular puntos en las zonas donde la solución de la ecuación original varíe rápidamente, en ocasiones es posible determinar dichas zonas a partir de la ecuación misma, en general no es sencillo hacer esto por lo que las condiciones que debe cumplir la función de peso no son sencillas de determinar.

Una forma de resolver el problema es utilizar el método de **mallas adaptivas**, éste consiste en generar una malla al mismo tiempo que se resuelve la ecuación original, considerando a esta junto con la ecuación generadora como un sistema de ecuaciones.

Para aclarar la idea anterior consideremos el problema:

$$(\alpha f_X)_X + \beta f_X = g \quad X \in [a, b] \quad (1.68)$$

$$f(a) = f_0 \quad f(b) = f_1 \quad (1.69)$$

Se desea definir una función de peso para la ecuación (1.54) que nos permita acumular puntos de la malla en las zonas donde la solución f varíe rápidamente, esto es equivalente a pedir que W tome valores cercanos a cero cuando f_X sea grande en valor absoluto, el caso más simple es tomar:

$$W = \frac{1}{|f_X|},$$

pero esta elección requiere de

$$f_X \neq 0, \quad (1.70)$$

además el valor absoluto no es una función suave por lo que esta función de peso resulta poco atractiva.

Existen diversos criterios para definir funciones de peso de mallas adaptivas, una de las más

simples y de uso común es:

$$W = \frac{1}{\sqrt{1 + \epsilon^2 f_X^2}} \quad (1.71)$$

con $\epsilon > 0$.

Observemos que si f_X es muy cercano a cero W es cercano a uno por lo que los nodos tendrán una distribución casi uniforme, mientras que si f_X es muy grande se tiene:

$$W \approx \frac{1}{\epsilon |f_X|}$$

por lo que los nodos de la malla estarán muy cercanos entre si.

La restricción (1.70) ha desaparecido pues el denominador es siempre distinto de cero, y la función generadora tiene derivada continua, ya que W es suave.

La principal desventaja de esta función de peso es que si f tiene un valor extremo en X_0 es decir $f_X(X_0) = 0$ entonces la solución en los puntos cercanos a X_0 puede ser considerada constante por lo que el valor extremo se perdería.

Para conseguir una mayor acumulación de puntos cerca de los valores extremos de f puede introducirse dentro de la función de peso a la segunda derivada de f , es decir:

$$W = W(f_X, f_{XX}) \quad (1.72)$$

La forma general de W para esta situación puede escribirse así:

$$W = 1 + \epsilon h + \lambda k \quad h = h(f_X) \quad k = k(f_{XX}) \quad \epsilon, \lambda > 0$$

En la función W pueden incluirse otros argumentos (derivadas de orden superior o incluso la misma función f) según lo requiera la ecuación que se desea resolver.

Una vez determinada la función W el problema será resolver el sistema de ecuaciones dado por (1.68) y (1.54):

$$(\alpha f_X)_X + \beta f_X = g$$

$$\left(\frac{X_\xi}{W}\right)_\xi = 0 \quad (1.73)$$

Bajo las condiciones de frontera:

$$f(a) = A, \quad f(b) = B, \quad X(0) = a, \quad X(1) = b$$

El sistema (1.74) puede transformarse en un sistema sobre la variable ξ , de acuerdo con la sección (1.5) y resolverse como un problema en el espacio lógico, para aclarar esto consideremos el siguiente problema:

$$\begin{aligned} f_{XX} - v f_X &= 0 & a \leq X \leq b \\ f(a) &= 0 & f(b) = 1 \end{aligned}$$

La malla será generada por la ecuación (1.54) y W sera tomada como en (1.71).

Recordemos que:

$$f_\xi = f_X X_\xi$$

Al transformar la ecuación para f se tiene:

$$\left(\frac{f_\xi}{X_\xi}\right)_\xi - \frac{v f_\xi}{X_\xi} = 0 \quad 0 \leq \xi \leq 1$$

o bien

$$f_{\xi\xi} - \left(\frac{X_{\xi\xi}}{X_\xi} + v\right) f_\xi = 0 \quad 0 \leq \xi \leq 1$$

mientras que la función W se transforma en:

$$W(X(\xi)) = \frac{|X_\xi|}{\sqrt{X_\xi^2 + \epsilon^2 f_\xi^2}}$$

De esta forma tenemos ahora un sistema de ecuaciones en el espacio lógico.

Finalmente el sistema puede ser escrito de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \left(\frac{f_\xi}{X_\xi} \right)_\xi - \frac{v f_\xi}{X_\xi} &= 0 & 0 \leq \xi \leq 1 \\ f(0) &= A & f(1) = B \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{(\sqrt{X_\xi^2 + \epsilon^2 f_\xi^2}) X_\xi}{|X_\xi|} \right)_\xi &= 0 & 0 \leq \xi \leq 1 \\ X(0) &= a & X(1) = b \end{aligned} \tag{1.74}$$

1.7 EL CALCULO VARIACIONAL Y LA GENERACION DE MALLAS

Hasta ahora hemos visto diferentes ecuaciones mediante las cuales se generan mallas, es natural preguntarnos entonces de donde se obtienen estas ecuaciones, es decir, que técnica podemos utilizar para obtener una ecuación como generador de mallas.

El cálculo variacional proporciona una técnica útil para responder a ésta pregunta.

Esta técnica será estudiada con mayor detalle en el caso de dos dimensiones y por el momento sólo veremos un ejemplo de su utilidad.

Consideremos la siguiente expresión:

$$I_{[X]} = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{(X_\xi)^2}{\Phi} d\xi \quad (1.75)$$

El problema que queremos resolver ahora es el de minimizar esta expresión sobre todas las funciones $X(\xi)$ continuamente diferenciables que satisfagan las condiciones de frontera $X(0) = a$ $X(1) = b$.

La función X que resuelva el problema será precisamente la transformación con la cual generaremos la malla sobre el intervalo $[a, b]$, por esta razón la malla generada se denomina malla mínima.

Para minimizar $I_{[X]}$ tomemos la función

$$F(\varepsilon) = I_{[X+\varepsilon C]} = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{((X + \varepsilon C)_\xi)^2}{\Phi} d\xi \quad (1.76)$$

donde C es una función continuamente diferenciable en $[0, 1]$ tal que $C(0) = C(1) = 0$.

Si X es una función que minimiza a $I_{[X]}$ entonces $\varepsilon = 0$ es un mínimo para F es decir debe cumplirse la igualdad:

$$F'(0) = \int_0^1 \frac{X_\xi}{\Phi} C_\xi d\xi = 0 \quad (1.77)$$

Integrando por partes tenemos:

$$\int_0^1 \left(\frac{X_\xi}{\Phi} \right)_\xi C = 0 \quad (1.78)$$

Esto debe cumplirse para toda C así que se tiene

$$\left(\frac{X_\xi}{\Phi} \right)_\xi = 0 \quad (1.79)$$

Es decir que la función que minimiza a $I_{[X]}$ debe cumplir con la ecuación (1.79) y es ésta ecuación la que genera la malla deseada.

La ecuación (1.79) es la misma que la ecuación (1.31) así que hemos visto que podemos generar una malla con control del espacio local mediante técnicas variacionales.

Al introducir una función de peso en el espacio físico, es decir $W(X)$, el procedimiento es el mismo, sin embargo ahora no será posible considerar a $\Phi(\xi) = W(X(\xi))$ como se hizo anteriormente, en realidad debemos tomar $\Phi = W^2$ así consideraremos:

$$I_{[X]} = \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\frac{X_\xi(\xi)}{W(X)} \right)^2 d\xi \quad (1.80)$$

Mediante un proceso análogo al anterior podemos ver que la función X que minimiza a $I_{[X]}$ debe cumplir la ecuación:

$$\left(\frac{X_\xi}{W(X)} \right)_\xi = 0 \quad (1.81)$$

Esta ecuación corresponde al caso de la generación con control del espacio de malla mediante una función de peso en el intervalo físico.

1.8 IMPLEMENTACION NUMERICA

Todas las ecuaciones vistas hasta ahora pueden ser aproximadas por el método de diferencias finitas, esto conduce siempre a un sistema de ecuaciones algebraico para ilustrar el procedimiento usaremos la ecuación (1.31)

$$\left(\frac{X_\xi}{\Phi}\right)_\xi = 0 \quad (1.82)$$

Para discretizar ésta ecuación usaremos el esquema de diferencias centrales para la primera derivada, lo cual nos conduce a:

$$\left[\left(\frac{X_\xi}{\Phi}\right)_\xi\right]_i \approx \frac{1}{\Delta\xi} \left[\left(\frac{X_\xi}{\Phi}\right)_{i+\frac{1}{2}} + \left(\frac{X_\xi}{\Phi}\right)_{i-\frac{1}{2}}\right] \quad (1.83)$$

donde $i = 1, 2, \dots, (m-1)$.

Al desarrollar el lado derecho de la expresión anterior aplicando nuevamente el esquema central se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta\xi} \left[\left(\frac{X_\xi}{\Phi}\right)_{i+\frac{1}{2}} - \left(\frac{X_\xi}{\Phi}\right)_{i-\frac{1}{2}}\right] &\approx \frac{1}{\Delta^2\xi} \left[\frac{X_{i+1} - X_i}{\Phi_{i+\frac{1}{2}}} - \frac{X_i - X_{i-1}}{\Phi_{i-\frac{1}{2}}}\right] = \\ &= \frac{1}{\Delta^2\xi} \left[\frac{1}{\Phi_{i+\frac{1}{2}}}X_{i+1} - \left(\frac{1}{\Phi_{i+\frac{1}{2}}} + \frac{1}{\Phi_{i-\frac{1}{2}}}\right)X_i + \frac{1}{\Phi_{i-\frac{1}{2}}}X_{i-1}\right] \end{aligned} \quad (1.84)$$

La última parte de esta expresión nos da la discretización de la ecuación 1.82

$$\frac{1}{\Phi_{i+\frac{1}{2}}}X_{i+1} - \left(\frac{1}{\Phi_{i+\frac{1}{2}}} + \frac{1}{\Phi_{i-\frac{1}{2}}}\right)X_i + \frac{1}{\Phi_{i-\frac{1}{2}}}X_{i-1} = 0$$

En general para las ecuaciones vistas hasta ahora la discretización conducirá a un sistema de la forma:

$$\frac{1}{\Delta^2\xi} [l_i X_{i-1} + c_i X_i + r_i X_{i+1}] = g_i \quad (1.85)$$

con

$$c_i = -(l_i + r_i) \quad (1.86)$$

De ésta forma solo l_i y r_i deben ser especificados para la solución del problema.

En el caso de la ecuación (1.82) tenemos:

$$r_i = \frac{1}{\Phi_{i+\frac{1}{2}}}, \quad l_i = r_{i-1}, \quad g_i = 0 \quad (1.87)$$

El sistema obtenido es tridiagonal simétrico y necesitará de un tratamiento especial en los extremos, para $i = 1$ tenemos $X_{i-1} = X_0 = a$ por lo que la primera ecuación del sistema puede escribirse con los siguientes coeficientes:

$$r_1 = \frac{1}{\Phi_{\frac{3}{2}}}, \quad g_1 = -r_0 a \quad l_1 = 0 \quad (1.88)$$

y para el caso de $i = m - 1$ los coeficientes serán:

$$r_{m-1} = 0, \quad g_{m-1} = -\left(\frac{1}{\Phi_{m-\frac{1}{2}}}\right) b \quad l_{m-1} = r_{m-2} \quad (1.89)$$

Podemos ver que los puntos medios de los intervalos $[\xi_i, \xi_{i+1}]$ serán necesarios para calcular los coeficientes del sistema por lo que es conveniente tomar un espacio de malla igual a $\frac{\Delta\xi}{2}$, es decir si deseamos calcular los valores de $X(\xi)$ en $m - 1$ puntos ξ_i será necesario considerar una malla de $2(m - 1)$ puntos, de esta manera se aproxima en los puntos con $i = 1, 2, \dots, m - 1$, y los coeficientes de las ecuaciones se calculan en los puntos con $i = \frac{3}{2}, \dots, \frac{2m-1}{2}$.

Las mallas generadas a partir de las ecuaciones (1.31) y (1.32):

$$X_{\xi\xi} - \frac{\Phi_\xi}{\Phi} X_\xi = 0 \quad (1.90)$$

son las mismas, sin embargo al desarrollar ésta última en diferencias finitas el esquema es diferente al anterior, los coeficientes para la discretización de la ecuación (1.90) son:

$$r_i = 1 - \frac{\Phi_{i+1} - \Phi_{i-1}}{4\Phi_i} \quad l_i = 1 + \frac{\Phi_{i+1} - \Phi_{i-1}}{4\Phi_i} \quad g_i = 0 \quad (1.91)$$

coeficientes del sistema son:

$$X_{\xi\xi} - \frac{W_\xi}{W} X_\xi = 0$$

$$g_i = \frac{(W_{i+1} - W_{i-1})(X_{i+1} - X_{i-1})}{4W_i \nabla^2 \xi} \quad r_i = l_i = 1$$

1.9 Un ejemplo resuelto

Anteriormente se tomó como modelo al problema de valores:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dX} \left[K(X) \frac{du}{dX} \right] &= 0 & 0 < X < l \\ U(0) &= U_0 & U(l) = U_1 \end{aligned} \quad (1.94)$$

Ahora aplicaremos la teoría desarrollada en este capítulo para aproximar la solución, al caso particular

$$\begin{aligned} \frac{d}{dX} \left[(1 + 10X) \frac{du}{dX} \right] &= 0 & 0 < X < 10 \\ U(0) &= 0 & U(10) = 1 \end{aligned}$$

La aproximación se realiza sobre cuatro diferentes mallas, siendo la primera de ellas la malla uniforme, y se compara el error cometido en cada una de las aproximaciones.

Una opción para obtener la aproximación deseada es mediante la transformación del problema sobre el intervalo $[0, 10]$, en un problema sobre el intervalo $[0, 1]$, mediante las formulas de la sección (1.5), y discretizar la ecuación resultante con un esquema de diferencias centrales, este proceso será utilizado ahora sobre el problema anterior, utilizando tres diferentes ecuaciones generadoras.

Las mallas en todos los casos constan de 25 nodos.

1.9.1 1ª aproximación (malla uniforme)

Consideremos la transformación:

$$X(\xi) = 10\xi \quad 0 \leq \xi \leq 1$$

Tenemos entonces:

$$X_\xi = 10$$

De la ecuación 1.94:

$$K(\xi) = 1 + 10(10\xi)$$

Para transformar el problema se tiene:

$$\tilde{K}(\xi) = \frac{K(\xi)}{X_\xi}$$

Por lo que la ecuación transformada es:

$$\frac{d}{d\xi} \left[\frac{1 + 100\xi}{10} \frac{du}{d\xi} \right] = 0$$

La discretización se lleva a cabo usando el esquema (1.5) con espacio de malla constante y la implementación numérica se realiza mediante las fórmulas de la sección (1.8) tomando para ello $\Phi = \frac{1}{K}$.

En las siguientes gráficas se muestra el resultado de la aproximación y el error con la solución analítica.

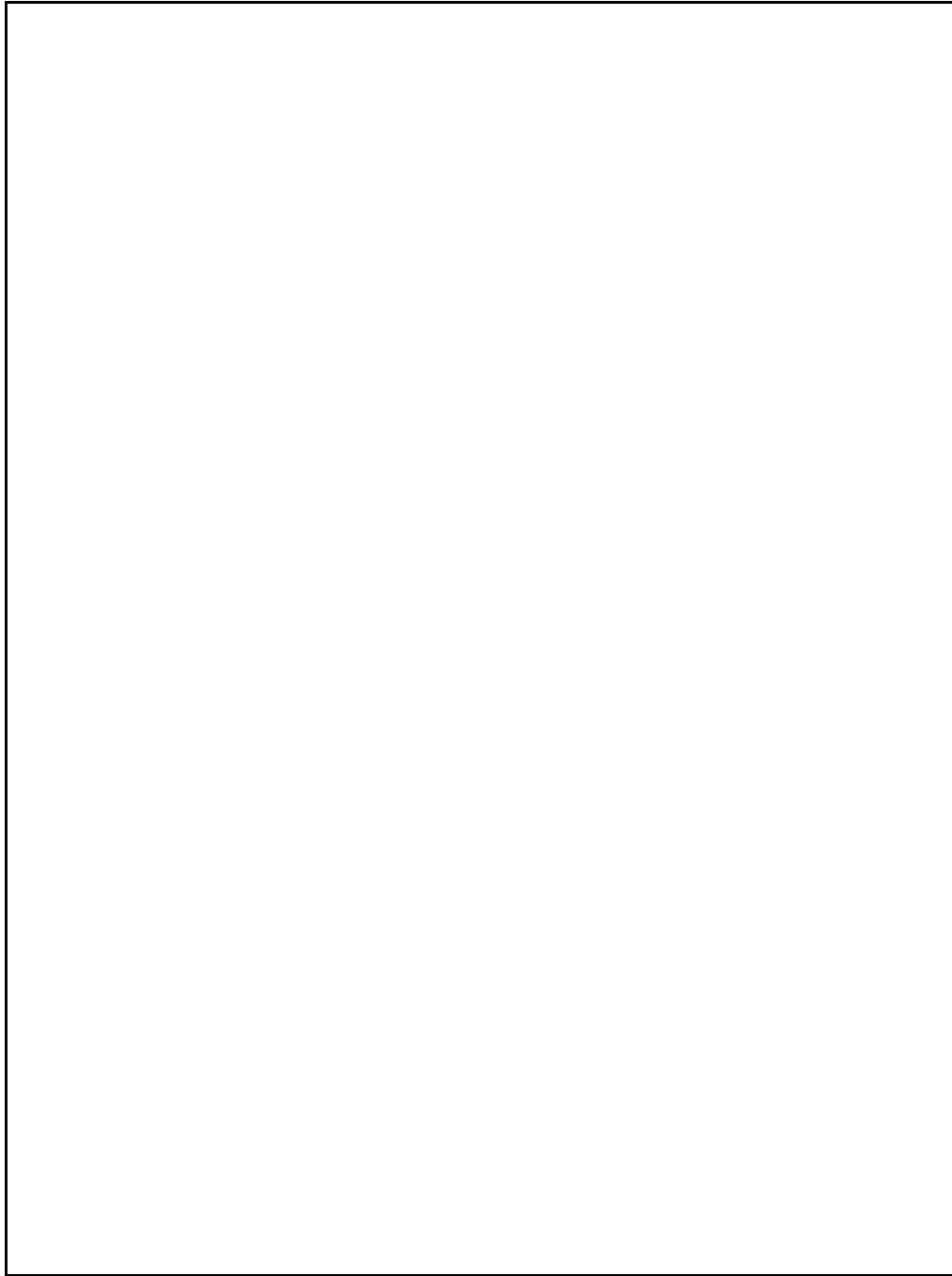


Fig. 1-28:

1.9.2 2ª Aproximación (malla con exp)

La segunda aproximación se lleva a cabo sobre una malla generada por la función:

$$X(\xi) = 10 \frac{\exp(\lambda\xi) - 1}{\exp(\lambda) - 1} \quad \lambda = 4.4$$

La cual corresponde a la solución de la ecn. (1.31) con $\Phi = \exp(\lambda\xi)$.

Tenemos ahora:

$$X_\xi = 10 \frac{\lambda \exp(\lambda\xi)}{\exp(\lambda) - 1}$$

y

$$K(\xi) = 1 + 10 \left(10 \frac{\exp(\lambda\xi) - 1}{\exp(\lambda) - 1} \right)$$

Al transformar tenemos

$$\tilde{K}(\xi) = \frac{(\exp(\lambda) - 1) + 10 (10 \exp(\lambda\xi) - 1)}{10\lambda \exp(\lambda\xi)}$$

La aproximación resultante y el error son mostrados en las siguientes gráficas.

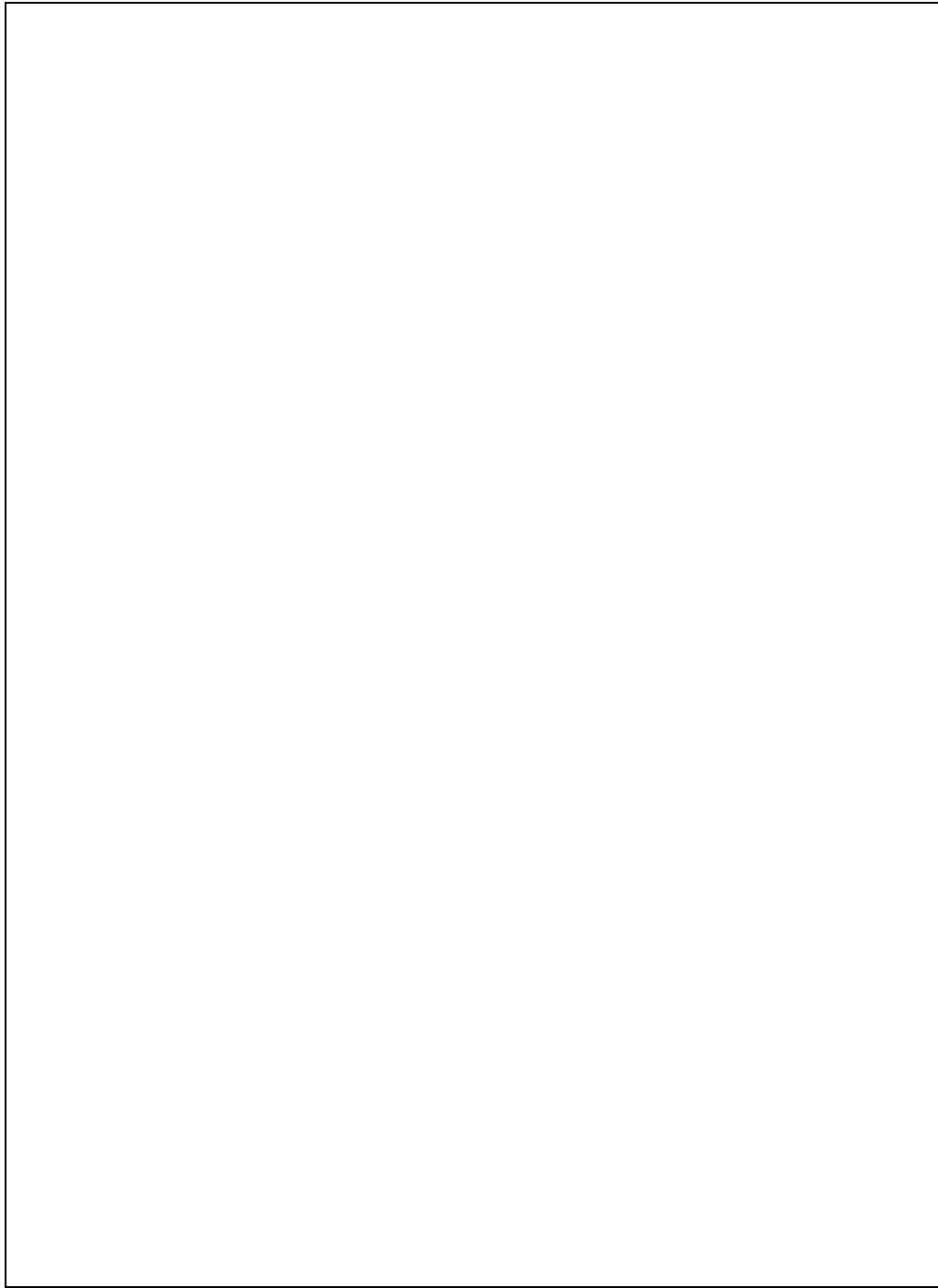


Fig. 1-29:

1.9.3 3ª Aproximación (malla con senh)

Para realizar la transformación consideraremos ahora la función de distribución:

$$X(\xi) = 10 \frac{\sinh(\lambda\xi)}{\sinh(\lambda)} \quad \lambda = 5.766$$

por lo que:

$$X_\xi = 10 \frac{5.766 \cosh(5.766\xi)}{\sinh(5.766)}$$

Observemos que esta función corresponde a la solución de la ecn. (1.31) con $\Phi = \cosh(\lambda\xi)$.

Nuevamente de la ecuación 1.94:

$$K(\xi) = 1 + 10 \left(10 \frac{\sinh(5.766\xi)}{\sinh(5.766)} \right)$$

Por lo que al transformar el problema tenemos:

$$\frac{d}{d\xi} \left[\tilde{K}(\xi) \frac{du}{d\xi} \right] = 0$$

$$\tilde{K}(\xi) = \frac{K(\xi)}{X_\xi} = \frac{\sinh(\lambda) + 100 \sinh(\lambda\xi)}{10\lambda \cosh(\lambda\xi)}$$

Los resultados de este proceso se muestran en las siguientes figuras .

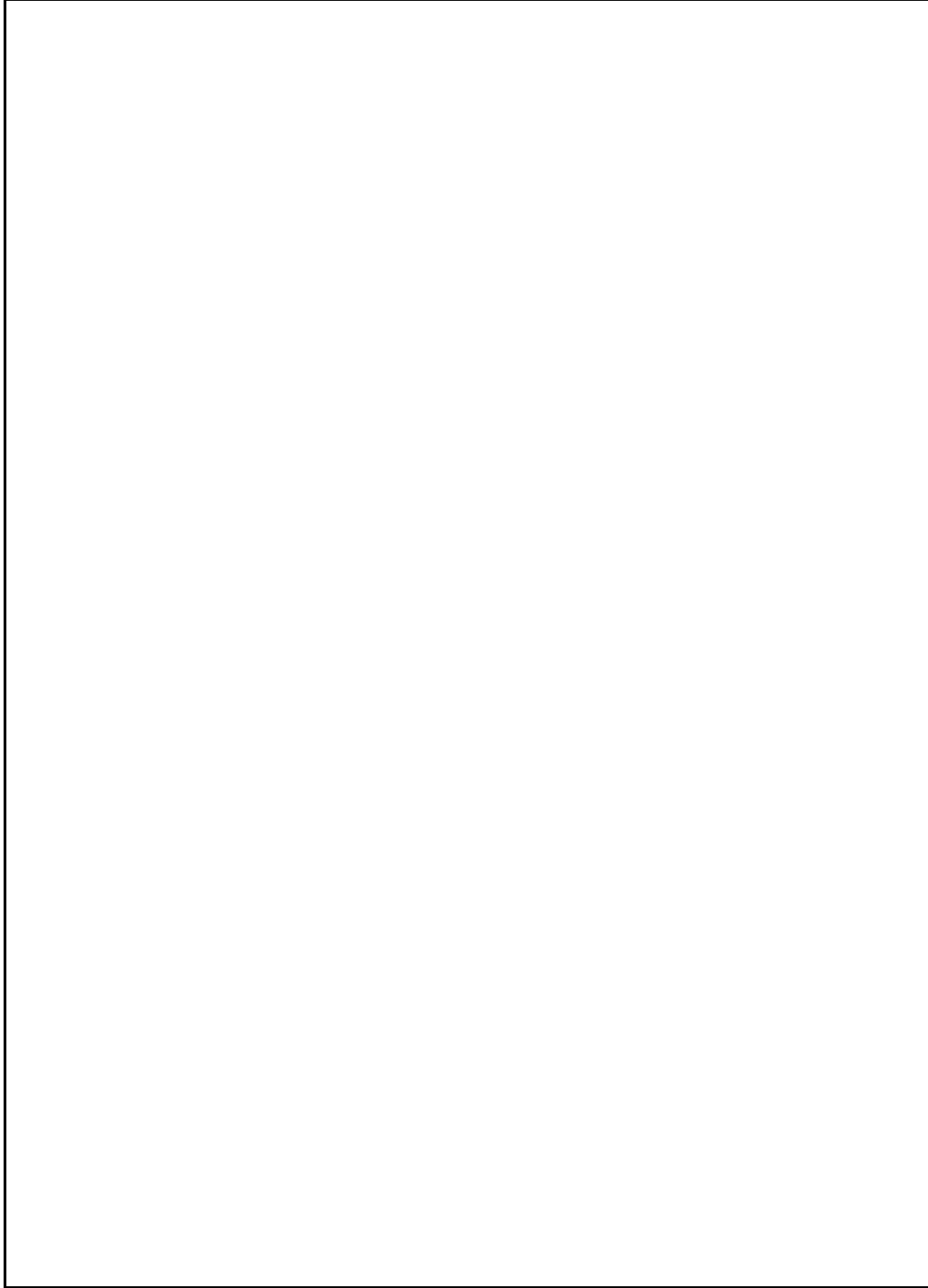


Fig. 1-30:

1.9.4 4ª aproximación (malla geométrica)

Finalmente tomaremos una malla geométrica de 25 nodos (23 nodos internos) sobre el intervalo $[0, 10]$.

A diferencia de los tres casos anteriores ahora la ecuación no será transformada al intervalo $[0, 1]$, sino que se utilizará un esquema de orden uno sobre la malla generada en el intervalo $[0, 10]$.

Como se vio en la sección 1.2 es necesario determinar el valor apropiado del parámetro ρ , para obtener mejores resultados, así al aplicar la fórmula tenemos:

$$\rho = \left[1 - \frac{100}{101} \right]^{\frac{1}{24}} \approx 0.825$$

Por lo que la malla puede ahora ser generada resolviendo el sistema (1.22).

La ecuación es aproximada por el esquema (1.5) por lo que los valores de la ecn. en los nodos estarán dados por el sistema:

$$\begin{aligned} K_{i+\frac{1}{2}} \frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta X_i} - K_{i-\frac{1}{2}} \frac{u_i - u_{i-1}}{\nabla X_i} &= 0 & 2 \leq i \leq 24 \\ u_1 &= 1 & u_{25} = 1 \end{aligned}$$

donde:

$$\Delta X_i = X_{i+1} - X_i \quad \nabla X_i = X_i - X_{i-1}$$

Por otro lado podemos tomar:

$$K_{i\pm\frac{1}{2}} = \frac{K_{i\pm 1} + K_i}{2}$$

por lo que no es necesario calcular los puntos medios de la malla.

Al desarrollar tenemos:

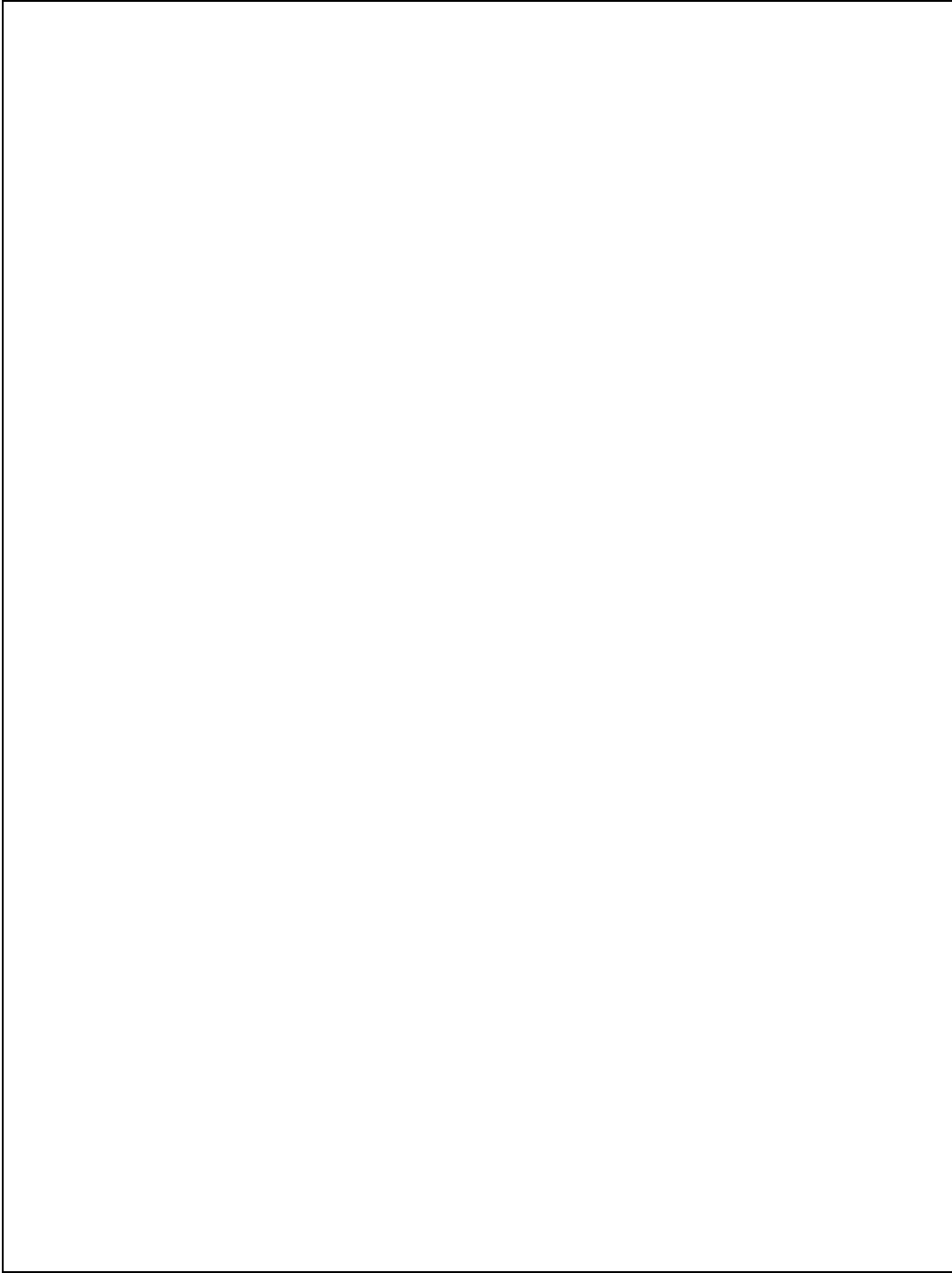


Fig. 1-31:

CAPITULO 2

APROXIMACION EN DIFERENCIAS FINITAS

2.1 INTRODUCCION

Uno de los métodos más frecuentemente utilizado para la solución de ecuaciones diferenciales es el método de **diferencias finitas** ya que este es relativamente económico computacionalmente y sencillo de utilizar, su proceso consta de tres pasos fundamentales.

El primer paso es el de **discretización del dominio**, y consiste en elegir un conjunto discreto de puntos en el dominio de la ecuación sobre los cuales se calculará la aproximación a la solución real de la ecuación, cada uno de estos puntos son llamados nodos, y al conjunto de todos ellos se le denomina **una malla**, así pues, el primer paso es elegir una malla sobre el dominio de trabajo.

El segundo paso es el de **aproximación o discretización de la ecuación**, el cual consiste en sustituir las derivadas que aparecen en la ecuación por diferencias discretas evaluadas en los nodos de la malla elegida, con esto se produce un conjunto de ecuaciones algebraicas en las que las variables serán los valores de la función sobre los nodos, que a su vez son la aproximación buscada.

El último paso es la **solución del sistema** de ecuaciones algebraicas.

El primer paso del método de diferencias finitas ha sido discutido para el caso unidimensional en el capítulo anterior, en tanto que el caso bidimensional será analizado en el siguiente

capítulo, por el momento fijaremos nuestra atención en el paso de aproximación.

2.2 ESQUEMAS DE APROXIMACION

La idea fundamental del método de diferencias finitas está en el segundo paso, es decir en la aproximación a las derivadas por medio de diferencias, por ésta razón iniciaremos estudiando los esquemas de aproximación más comunes, para esto supondremos que ya se ha elegido una malla en el dominio sobre la cual se realizará la aproximación.

La aproximación en diferencias finitas está basada en la definición standard de derivada de una función continua $u(\xi)$.

$$\frac{du}{d\xi} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(\xi + h) - u(\xi)}{h}$$

una aproximación en diferencias finitas puede verse como la definición anterior pero sin el proceso límite, es decir, un valor finito distinto de cero es utilizado para h , por lo que la derivada de $u(\xi)$ puede calcularse algebraicamente, así pues podemos tomar como una aproximación a la primera derivada la expresión:

$$\frac{du}{d\xi} \approx \frac{u(\xi + h) - u(\xi)}{h} \quad 0 < h < 1$$

Veamos ahora algunas aproximaciones en diferencias finitas para la primera derivada de $u(\xi) \in C^1[a, b]$, para esto tomaremos la malla sobre el intervalo $[a, b]$ dada por los puntos $a = \xi_0 < \xi_1 < \dots < \xi_{m-1} < \xi_m = b$, tomaremos además $\Delta\xi_i = \xi_{i+1} - \xi_i$, así, la derivada de $u(\xi)$ puede ser escrita como:

$$\frac{du}{d\xi}(\xi_i) = \lim_{\Delta\xi_i \rightarrow 0} \frac{u(\xi_i + \Delta\xi_i) - u(\xi_i)}{\Delta\xi_i} = \lim_{\Delta\xi_i \rightarrow 0} \frac{u(\xi_{i+1}) - u(\xi_i)}{\Delta\xi_i}$$

ahora bien al eliminar el proceso límite se tiene

$$\frac{du}{d\xi}(\xi_i) \approx U(\xi_i) = \frac{u(\xi_{i+1}) - u(\xi_i)}{\Delta\xi_i} = \frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta\xi_i} \quad (2.1)$$

donde $u_i = u(\xi_i)$ para toda i . De esta forma hemos obtenido una expresión algebraica que

aproxima el valor de la derivada de $u(\xi)$ en el punto ξ_i .

Es importante observar que la manera de aproximar una derivada no es única, por ejemplo, podemos hacer los siguientes esquemas de aproximación:

$$\frac{du}{d\xi}(\xi_i) \approx \frac{u_i - u_{i-1}}{\xi_i - \xi_{i-1}}$$

$$\frac{du}{d\xi}(\xi_i) \approx \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{\xi_{i+1} - \xi_{i-1}}$$

Para simplificar las fórmulas y hacer más sencillo el estudio de los esquemas de aproximación introduciremos algunos símbolos de uso común, estos son llamados **operadores** de diferencias finitas.

$$\Delta u_i = u_{i+1} - u_i \quad \text{Operador de diferencia adelante}$$

$$\nabla u_i = u_i - u_{i-1} \quad \text{Operador de diferencia atrás}$$

$$\delta u_i = u_{i+\frac{1}{2}} - u_{i-\frac{1}{2}} \quad \text{Operador de diferencia central}$$

$$\mu u_i = \frac{1}{2}(u_{i+\frac{1}{2}} - u_{i-\frac{1}{2}}) \quad \text{Operador de diferencia promedio}$$

Donde $u_{i\pm\frac{1}{2}} = u(\xi_{i\pm\frac{1}{2}})$ con $\xi_{i\pm\frac{1}{2}}$ el punto medio entre ξ_i y $\xi_{i\pm 1}$.

Un esquema de aproximación es denotado generalmente por la letra mayúscula correspondiente a la función aproximada, así podemos ahora simplificar los esquemas anteriores usando la notación de los operadores,:

$$\frac{du}{d\xi}(\xi_i) \approx U(\xi_i) = \frac{u_{i+1} - u_i}{\xi_{i+1} - \xi_i} = \frac{\Delta u_i}{\Delta \xi_i} \quad (2.2)$$

$$\frac{dv}{d\xi}(\xi_i) \approx V(\xi_i) = \frac{v_i - v_{i-1}}{\xi_i - \xi_{i-1}} = \frac{\nabla v_i}{\nabla \xi_i} \quad (2.2-b)$$

$$\frac{df}{d\xi}(\xi_i) \approx F(\xi_i) = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{\xi_{i+1} - \xi_{i-1}} = \frac{\delta(\mu f_i)}{\delta(\mu \xi_i)} \quad (2.2-c)$$

$$\frac{dw}{d\xi}(\xi_i) \approx W(\xi_i) = \frac{w_{i+\frac{1}{2}} - w_{i-\frac{1}{2}}}{\xi_{i+\frac{1}{2}} - \xi_{i-\frac{1}{2}}} = \frac{\delta w_i}{\delta \xi_i} \quad (2.2-d)$$

algunos esquemas para la segunda derivada y mayores pueden obtenerse mediante la aplicación repetida de los esquemas anteriores o bien por combinación de ellos.

Un esquema particularmente útil para la segunda derivada es el siguiente:

$$\frac{d^2u}{d\xi^2} \approx \frac{\frac{du}{d\xi}(\xi_{i+\frac{1}{2}}) - \frac{du}{d\xi}(\xi_{i-\frac{1}{2}})}{\xi_{i+\frac{1}{2}} - \xi_{i-\frac{1}{2}}} = \frac{\frac{u_{i+1}-u_i}{\xi_{i+1}-\xi_i} - \frac{u_i-u_{i-1}}{\xi_i-\xi_{i-1}}}{\xi_{i+\frac{1}{2}} - \xi_{i-\frac{1}{2}}} = \frac{\frac{\Delta u_i}{\Delta \xi_i} - \frac{\nabla u_i}{\nabla \xi_i}}{\delta \xi_i}$$

si el espacio entre los nodos de la malla es constante, es decir, $\Delta \xi = \Delta \xi_i = \nabla \xi_i = \delta \xi_i \forall i$, el esquema se reduce a la forma

$$\frac{d^2u}{d\xi^2} \approx \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{\Delta \xi^2} \quad (2.3)$$

2.2.1 ANALISIS DE APROXIMACION

Es importante determinar que tan bueno es cada uno de los esquemas vistos hasta ahora, es decir debemos analizar que tan cerca de la solución real esta la aproximación obtenida, esto no es sencillo, pues la solución real no se conoce.

El análisis de aproximación esta basado en la expansión de una función en su serie de Taylor, la cual esta dada por el siguiente resultado:

Teorema de Taylor:

Consideremos $u(\xi)$ una función continua con N derivadas continuas en el intervalo $[a, b]$. Dado un punto $\xi_0 \in [a, b]$ se tiene que para cualquier punto $\xi \in [a, b]$ se cumple la igualdad

$$u(\xi) = u(\xi_0) + (\xi - \xi_0) \frac{du}{d\xi}(\xi_0) + \frac{(\xi - \xi_0)^2}{2!} \frac{d^2u}{d\xi^2}(\xi_0) + \frac{(\xi - \xi_0)^3}{3!} \frac{d^3u}{d\xi^3}(\xi_0) +$$

$$+ \frac{(\xi - \xi_0)^4}{4!} \frac{d^4u}{d\xi^4}(\xi_0) + \dots + \frac{(\xi - \xi_0)^{N-1}}{(N-1)!} \frac{d^{N-1}u}{d\xi^{N-1}}(\xi_0) + Q^N$$

donde

$$Q^N \equiv \frac{(\xi - \xi_0)^N}{N!} \frac{d^N u}{d\xi^N}(\xi_*) \quad \text{para alguna } \xi_* \in [\xi, \xi_0]$$

La demostración de éste Teorema puede hallarse en diversos libros de cálculo diferencial.

2.2.1.1 Error de truncamiento

Podemos ahora analizar las aproximaciones anteriores usando el Teorema de Taylor.

Consideremos $u(\xi) \in C^N[a, b]$, dado el punto de malla ξ_i , la expansión en serie de Taylor para $u(\xi)$ en el punto ξ_{i+1} es:

$$u(\xi_{i+1}) = u(\xi_i) + \Delta\xi_i \frac{du}{d\xi}(\xi_i) + \frac{\Delta\xi_i^2}{2!} \frac{d^2u}{d\xi^2}(\xi_i) + \frac{\Delta\xi_i^3}{3!} \frac{d^3u}{d\xi^3}(\xi_i) + \dots$$

la cual podemos escribir como:

$$u_{i+1} = u_i + \Delta\xi_i \frac{du}{d\xi}(\xi_i) + \frac{\Delta\xi_i^2}{2!} \frac{d^2u}{d\xi^2}(\xi_i) + \dots$$

Al restar u_i en la última expresión tenemos:

$$\Delta u_i = u_{i+1} - u_i = \Delta\xi_i \frac{du}{d\xi}(\xi_i) + \frac{\Delta\xi_i^2}{2!} \frac{d^2u}{d\xi^2}(\xi_i) + \dots$$

finalmente al dividir por $\Delta\xi_i$ y despejar la primera derivada se tiene:

$$\frac{du}{d\xi}(\xi_i) = \frac{\Delta u_i}{\Delta\xi_i} - \frac{\Delta\xi_i}{2!} \frac{d^2u}{d\xi^2}(\xi_i) - \dots$$

si comparamos esta expresión con el esquema de diferencia adelante vemos que en la aproximación se ignoran los términos:

$$\frac{du}{d\xi}(\xi_i) - \frac{\Delta u_i}{\Delta\xi_i} = -\frac{\Delta\xi_i}{2!} \frac{d^2u}{d\xi^2}(\xi_i) - \frac{\Delta\xi_i^2}{3!} \frac{d^3u}{d\xi^3}(\xi_i) - \dots$$

Los términos ignorados representan el error cometido por la aproximación en diferencias, a tal error se le denomina **Error de Truncamiento** y en el caso del esquema con diferencia adelante esta dado por:

$$E.T.ad = \frac{du}{d\xi}(\xi_i) - \frac{\Delta u_i}{\Delta\xi_i} = -\frac{\Delta\xi_i}{2!} \frac{d^2u}{d\xi^2}(\xi_i) - \frac{\Delta\xi_i^2}{3!} \frac{d^3u}{d\xi^3}(\xi_i) - \dots \quad (2.4)$$

La estimación del error de truncamiento nos indica que tan lejos podemos estar del valor real de la derivada por lo que en los esquemas se busca que este error sea lo más chico posible.

Los errores para los esquemas de diferencia atrás y central pueden calcularse de manera similar al caso anterior, estos errores son:

$$E.T._{at} = \frac{du}{d\xi}(\xi_i) - \frac{\nabla u_i}{\nabla \xi_i} = -\frac{\nabla \xi_i}{2!} \frac{d^2 u}{d\xi^2}(\xi_i) - \frac{\nabla \xi_i^2}{3!} \frac{d^3 u}{d\xi^3}(\xi_i) - \dots$$

$$E.T._c = \frac{du}{d\xi}(\xi_i) - \frac{\delta(\mu u_i)}{\delta(\mu \xi_i)} = -\left[\frac{\Delta \xi_i^2 - \nabla \xi_i^2}{2!(2\delta \xi_i)} \frac{d^2 u}{d\xi^2}(\xi_i) + \frac{\Delta \xi_i^3 + \nabla \xi_i^3}{3!(2\delta \xi_i)} \frac{d^3 u}{d\xi^3}(\xi_i) + \dots \right]$$

Observemos que en el caso de la diferencia central con un espacio de malla constante, es decir, $\Delta \xi \equiv \Delta \xi_i = \nabla \xi_i = \delta \xi_i$ para toda i , el error se reduce a:

$$E.T._c = -\left[\frac{\Delta \xi_i^2}{3!} \frac{d^3 u}{d\xi^3}(\xi_i) + \frac{\Delta \xi_i^5}{5!} \frac{d^5 u}{d\xi^5}(\xi_i) + \dots \right] \quad (2.5)$$

en donde las derivadas pares han desaparecido.

Observemos que el error depende del punto ξ_i en el cual se hace la aproximación, así como del espacio de la malla, en general si $L[u(\xi)] = 0$ es una ecuación diferencial y $\tilde{L}[U(\xi)] = 0$ es un esquema de aproximación, el error cometido esta dado por

$$E.T. = \max_{1 \leq i \leq M} \left(L[u(\xi_i)] - \tilde{L}[U(\xi_i)] \right) \quad (2.6)$$

donde M es el número de puntos de malla.

2.2.1.2 Orden de aproximación

Analicemos ahora lo que sucede cuando el espacio de malla $\Delta \xi$ se reduce arbitrariamente.

Cuando $\Delta \xi$ es muy pequeño el término con el exponente más chico tiene el valor absoluto más grande y domina a los otros, además los valores de las derivadas son constantes ya que el punto ξ_i permanece fijo.

Es decir que el error depende principalmente del término con exponente menor, dicho exponente es llamado el **orden de aproximación** del esquema.

En general si $U(\xi_i)$ es la aproximación a $\frac{d^n u}{d\xi^n}(\xi_i)$ con un error de truncamiento:

$$E.T. = \frac{d^n u}{d\xi^n}(\xi_i) - U(\xi_i) = c_1 \frac{\Delta \xi^p}{(n+1)!} \frac{d^{n+1} u}{d\xi^{n+1}}(\xi_i) + c_2 \frac{\Delta \xi^{p+1}}{(n+2)!} \frac{d^{n+2} u}{d\xi^{n+2}}(\xi_i) + \dots$$

con $c_i \in R$ y $c_1 \neq 0$, decimos que el esquema tiene orden de aproximación p y lo denotamos por $O(\Delta\xi^p)$.

Así por ejemplo podemos ver que los esquemas con diferencia adelante y atrás tienen orden de aproximación uno, esto se denota como $O(\Delta\xi)$, mientras que el esquema central (con diferencia central) con espacio de malla constante tiene orden dos, denotado por $O(\Delta\xi^2)$.

Ahora si $L[u(\xi)]$ es una ecuación diferencial de $u(\xi)$ y $\tilde{L}[U(\xi)]$ es un esquema de aproximación entonces el orden de aproximación esta dado por el mínimo de los ordenes utilizados en el esquema, es decir al aproximar las derivadas involucradas en $L[u(\xi)]$ cada una puede tener un orden de aproximación diferente, y el menor de estos será tomado como el orden de aproximación del esquema completo.

Al aproximar una ecuación diferencial por diferencias finitas es importante buscar un esquema con el mayor orden de aproximación posible, pero un orden mayor en general solo es obtenido mediante esquemas de aproximación más complejos.

2.2.1.3 Consistencia

Al aproximar una derivada es necesario que la aproximación realmente se acerque a la derivada deseada, es decir, al reimplantar el proceso limite en dicha aproximación, la derivada original debe recuperarse, por lo que el esquema deberá ser arbitrariamente cercano a la derivada real cuando el espacio entre nodos sea arbitrariamente pequeño, esto significa que el error de truncamiento deberá acercarse a cero al tiempo que lo haga el espacio de malla.

Mas precisamente, dado un esquema de aproximación $U(\xi)$ para $\frac{d^n u}{d\xi^n}(\xi)$, debe cumplirse que:

$$\lim_{\Delta\xi \rightarrow 0} [U(\xi)] = \frac{d^n u}{d\xi^n}(\xi)$$

La condición anterior puede escribirse como:

$$\lim_{\Delta\xi \rightarrow 0} E.T. = 0 \tag{2.7}$$

cuando esta igualdad se cumple decimos que el **esquema** es **consistente**.

Para el caso de aproximación de una ecuación diferencial el esquema utilizado deberá aprox-

imarse a la ecuación original.

2.2.2 ESQUEMAS GENERALES DE APROXIMACION

Consideremos la derivada $\frac{d^n u}{d\xi^n}$ y una colección de $M + 1$ puntos en el intervalo $[a, b]$ tales que $\xi_0 = a < \xi_i < \xi_{i+1} < b = \xi_M$ los cuales serán usados para aproximar la derivada anterior.

El espacio de malla no necesariamente es constante, así pues el espacio entre nodos está dado por $\Delta\xi_i = \xi_{i+1} - \xi_i$ para toda $i = 0, 1, \dots, M$.

Denotemos el espacio más grande entre nodos por $\Delta\xi_{\max}$ es decir:

$$\Delta\xi_{\max} = \max_{0 \leq i \leq M-1} \{\Delta\xi_i\}$$

Evaluemos la derivada en un punto ξ_* , donde ξ_* no necesariamente es un punto de la malla.

Una aproximación en diferencias para la derivada es una combinación lineal de los valores de la función en los puntos de la malla, es decir:

$$\frac{d^n u}{d\xi^n}(\xi_*) \approx \gamma_0 u_0 + \gamma_1 u_1 + \gamma_2 u_2 + \dots + \gamma_M u_M = \sum_{i=0}^M \gamma_i u_i \quad (2.8)$$

Debe cumplirse además la condición de consistencia así que la combinación habrá de tener la siguiente propiedad:

$$\sum_{i=0}^M \gamma_i u_i = \frac{d^n u}{d\xi^n}(\xi_*) + O(\Delta\xi_{\max}^p), \quad p > 0 \quad (2.9)$$

donde $\Delta\xi_{\max}$ es usado como una medida general del espacio entre nodos.

La expansión en serie de Taylor para u_i en el punto ξ_* es de la forma

$$u_i = u_* + (\xi_i - \xi_*) \frac{du}{d\xi}(\xi_*) + \frac{(\xi_i - \xi_*)^2}{2!} \frac{d^2 u}{d\xi^2}(\xi_*) + \frac{(\xi_i - \xi_*)^3}{3!} \frac{d^3 u}{d\xi^3}(\xi_*) + \dots$$

Al sustituir esta expansión dentro de la combinación lineal tenemos:

$$\sum_{i=0}^M \gamma_i u_i = \sum_{i=0}^M \gamma_i \left[u_* + (\xi_i - \xi_*) \frac{du}{d\xi}(\xi_*) + \frac{(\xi_i - \xi_*)^2}{2!} \frac{d^2 u}{d\xi^2}(\xi_*) + \frac{(\xi_i - \xi_*)^3}{3!} \frac{d^3 u}{d\xi^3}(\xi_*) + \dots \right] =$$

$$\begin{aligned}
&= \left[\sum_{i=0}^M \gamma_i \right] u_* + \left[\sum_{i=0}^M \gamma_i (\xi_i - \xi_*) \right] \frac{du}{d\xi}(\xi_*) + \left[\sum_{i=0}^M \gamma_i \frac{(\xi_i - \xi_*)^2}{2!} \right] \frac{d^2u}{d\xi^2}(\xi_*) + \dots = \\
&= B_0(\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_M) u_* + B_1(\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_M) \frac{du}{d\xi}(\xi_*) + \dots \\
&+ B_n(\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_M) \frac{d^n u}{d\xi^n}(\xi_*) + B_{n+1}(\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_M) \frac{d^{n+1} u}{d\xi^{n+1}}(\xi_*) + \dots
\end{aligned}$$

donde las B_j son funciones lineales de las γ_i dadas por:

$$B_0 = \gamma_0 + \gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_M$$

$$B_1 = \gamma_0(\xi_0 - \xi_*) + \gamma_1(\xi_1 - \xi_*) + \gamma_2(\xi_2 - \xi_*) + \dots + \gamma_M(\xi_M - \xi_*)$$

. . .

(2.10)

$$B_n = \gamma_0 \frac{(\xi_0 - \xi_*)^n}{n!} + \gamma_1 \frac{(\xi_1 - \xi_*)^n}{n!} + \dots + \gamma_M \frac{(\xi_M - \xi_*)^n}{n!}$$

$$B_{n+1} = \gamma_0 \frac{(\xi_0 - \xi_*)^{n+1}}{(n+1)!} + \gamma_1 \frac{(\xi_1 - \xi_*)^{n+1}}{(n+1)!} + \dots + \gamma_M \frac{(\xi_M - \xi_*)^{n+1}}{(n+1)!}$$

Observemos que cada B_j puede ser escrito como:

$$B_j = \frac{1}{j!} \sum_i \left[\gamma_i \alpha_i^j (\Delta \xi_{\max})^j \right] \quad \alpha_i = \frac{(\xi_i - \xi_*)}{\Delta \xi_{\max}}$$

Ahora bien para que se cumpla la condición de consistencia (2.7) debe tenerse que el coeficiente de $\frac{\partial^n u}{\partial \xi^n}$ debe ser igual a uno, es decir $B_n = 1$.

Esto implica que cada γ_i debe ser proporcional a $(\Delta \xi_{\max})^{-n}$ pues cada una de estas esta en B_n multiplicada por un término proporcional a $(\Delta \xi_{\max})^n$

De acuerdo con lo anterior tenemos que los coeficientes B_j son proporcionales a $(\Delta \xi_{\max})^{j-n}$, sin embargo esto implica que $B_j \rightarrow \infty$ si $\Delta \xi_{\max} \rightarrow 0$, y $j < n$ lo cual elimina la consistencia, la única forma de que esto no suceda es que $B_j = 0$ para toda $j < n$.

Así la consistencia requiere que cada B_j con $j < n$ sea idénticamente cero y $B_n = 1$.

Lo anterior se resume en las condiciones:

$$B_0 = B_1 = B_2 = \dots = B_{n-1} = 0$$

$$B_n = 1 \tag{2.11}$$

De acuerdo con la definición de las B_j estas condiciones nos llevan al sistema de ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdot & \cdot & 1 \\ \xi_0 - \xi_* & \xi_1 - \xi_* & \cdot & \cdot & \xi_M - \xi_* \\ (\xi_0 - \xi_*)^2 & (\xi_1 - \xi_*)^2 & \cdot & \cdot & (\xi_M - \xi_*)^2 \\ \cdot & \cdot & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & \cdot \\ (\xi_0 - \xi_*)^{n-1} & (\xi_1 - \xi_*)^{n-1} & \cdot & \cdot & (\xi_M - \xi_*)^{n-1} \\ (\xi_0 - \xi_*)^n & (\xi_1 - \xi_*)^n & \cdot & \cdot & (\xi_M - \xi_*)^n \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_0 \\ \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \gamma_{M-1} \\ \gamma_M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ n! \end{pmatrix}$$

o bien $\mathbf{A}\mathbf{g} = \mathbf{b}$

La matriz \mathbf{A} es de $(n + 1) \times (M + 1)$, \mathbf{g} es $(M + 1) \times 1$ y \mathbf{b} es $(n + 1) \times 1$.

Cuando la matriz \mathbf{A} es cuadrada ($M = n$) la solución existe y es única pues el determinante es conocido como **determinante de Vandermonde**, el cual se sabe que es distinto de cero.

Así, se requieren al menos $n + 1$ puntos para que exista un esquema consistente para aproximar la derivada de orden n .

En general la aproximación tiene orden $(M + 1) - n$, así que cuando el mínimo de puntos (n) es utilizado la aproximación es de orden 1.

2.3 EL PROBLEMA DE DIRICHLET EN UNA DIMENSION

Consideremos el problema:

$$(\alpha(\xi)f_\xi)_\xi = g(\xi), \quad f(a) = A \quad f(b) = B \quad a < \xi < b \tag{2.12}$$

donde $a, b, A, B \in R$ y α, g son funciones conocidas.

Para discretizar el problema consideraremos una malla con distribución uniforme de M puntos en el intervalo (a, b) .

Usando el esquema de diferencia central la expresión de la izquierda en la ecuación será:

$$\begin{aligned} (\alpha(\xi)f_\xi)_\xi &\approx \frac{(\alpha f_\xi)_{i+\frac{1}{2}} - (\alpha f_\xi)_{i-\frac{1}{2}}}{\Delta\xi} \approx \frac{(\alpha_{i+\frac{1}{2}}f_{i+1} - \alpha_{i+\frac{1}{2}}f_i) - (\alpha_{i-\frac{1}{2}}f_i - \alpha_{i-\frac{1}{2}}f_{i-1})}{\Delta\xi^2} = \\ &= \frac{\alpha_{i-\frac{1}{2}}f_{i-1} - (\alpha_{i+\frac{1}{2}} + \alpha_{i-\frac{1}{2}})f_i + \alpha_{i+\frac{1}{2}}f_{i+1}}{\Delta\xi^2} \end{aligned}$$

La función g no debe ser aproximada, pues sus valores son conocidos, así que para la dizcretización solo se debe tomar $g_i = g(\xi_i)$.

La dizcretización finalmente toma la forma:

$$l_i f_{i-1} + c_i f_i + r_i f_{i+1} = g_i \Delta\xi^2 \quad (2.13)$$

donde:

$$l_i = \alpha_{i-\frac{1}{2}}, \quad r_i = \alpha_{i+\frac{1}{2}}, \quad c_i = -(l_i + r_i) \quad (2.14)$$

Las condiciones de frontera determinan los valores de f para $i = 0, i = M$ es decir

$$f_0 = A, \quad f_M = B$$

este esquema nos conduce a un sistema de ecuaciones algebraicas, observemos que si $i = 1$, o $i = M - 1$ las ecuaciones correspondientes pueden ser escritas como

$$c_1 f_1 + r_1 f_2 = g_1 \Delta\xi^2 - l_1 A$$

$$l_{M-1} f_{M-1} + c_{M-1} f_{M-1} = g_{M-1} \Delta\xi^2 - r_{M-1} B$$

2.4 APROXIMACION EN DIMENSIONES SUPERIORES

Realizaremos ahora una generalización de los esquemas anteriores para el caso de dos dimensiones, para dimensiones mayores la generalización es similar.

Sea I_2 el cuadrado unitario en R^2 una malla rectangular de n nodos en la dirección ξ y m nodos en la dirección η en I_2 , esta dada por los puntos (ξ_i, η_j) con $0 \leq \xi_i, \eta_j \leq 1$, $i = 0, 1, \dots, n$ y $j = 0, 1, \dots, m$, los espacios $\Delta\xi = \xi_{i+1} - \xi_i$, $\Delta\eta = \eta_{j+1} - \eta_j$ son constantes pero no necesariamente iguales.

2.4.1 DERIVADAS MIXTAS.

Consideremos la función $u : I_2 \rightarrow R$ con $u(\xi, \eta) \in C^K[I_2]$, el valor de u en un punto de la malla (ξ_i, η_j) es denotado por $u_{i,j} = u(\xi_i, \eta_j)$, las aproximaciones a las primeras derivadas de u y a las derivadas de orden mayor respecto de una sola variable son similares a las hechas para el caso unidimensional, considerando a u como función únicamente de la variable respecto a la cual se ha derivado.

La misma idea será utilizada para el caso de derivadas mixtas, es decir, mantendremos fija una de las variables para hacer la aproximación.

Tomemos la derivada mixta $\frac{\partial}{\partial\xi} \left(\alpha \frac{\partial u}{\partial\eta} \right) (\xi_i, \eta_j) = \frac{\partial}{\partial\xi} \left(\alpha \frac{\partial u}{\partial\eta} (\xi, \eta_j) \right) (\xi_i, \eta)$ con (ξ_i, η_j) un punto en la malla sobre I_2 , una aproximación a esta derivada en diferencias finitas es:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial\xi} \left(\alpha \frac{\partial u}{\partial\eta} (\xi, \eta_j) \right) (\xi_i, \eta) &\approx \frac{\left(\alpha \frac{\partial u}{\partial\eta} (\xi, \eta_j) \right)_{i+1} - \left(\alpha \frac{\partial u}{\partial\eta} (\xi, \eta_j) \right)_{i-1}}{\Delta\xi} \approx \\ &\approx \frac{\alpha_{i+1,j} \left(\frac{u_{i+1,j+1} - u_{i,j-1}}{\Delta\eta} \right) - \alpha_{i-1,j} \left(\frac{u_{i-1,j+1} - u_{i-1,j-1}}{\Delta\eta} \right)}{\Delta\xi} = \\ &= \frac{\alpha_{i+1,j}(u_{i+1,j+1} - u_{i+1,j-1}) - \alpha_{i-1,j}(u_{i-1,j+1} - u_{i-1,j-1})}{\Delta\xi\Delta\eta} \end{aligned} \quad (2.15)$$

la última expresión es un esquema en cuatro puntos para la segunda derivada mixta de u .

Es importante tener en cuenta que la evaluación de u tomando una sola variable y manteniendo fija la otra fue posible debido a que la malla es rectangular, es decir, la evaluación se realiza sobre líneas paralelas a los ejes, sin embargo ésto no es posible para el caso de mallas

más generales.

2.4.1.1 Consistencia estricta y consistencia débil.

Los conceptos de error de truncamiento y consistencia para el caso unidimensional se generaliza fácilmente para el plano, sin embargo en la consistencia ahora tenemos dos situaciones que deben considerarse.

La primera de ellas es la **consistencia estricta**, la cual requiere que el error de truncamiento se anule en el límite cuando el espacio de malla se aproxima a cero en cualquiera de las dos direcciones, es decir, que será suficiente que una de las cantidades $\Delta\xi$ ó $\Delta\eta$, se acerque arbitrariamente a cero para que el error desaparezca independientemente de la otra cantidad, lo cual está dado por la condición:

$$\lim_{\Delta\xi \rightarrow 0} E.T. = 0 \quad (2.16)$$

$$\lim_{\Delta\eta \rightarrow 0} E.T. = 0 \quad (2.16-b)$$

Esta condición es difícil de alcanzar, a menos que se trate de mallas rectangulares.

Para que un esquema sea consistente basta que el error desaparezca cuando los dos espacios de malla $\Delta\xi, \Delta\eta$, se aproximen a cero, esto es:

$$\lim_{\substack{\Delta\xi \rightarrow 0 \\ \Delta\eta \rightarrow 0}} E.T. = 0 \quad (2.17)$$

Esta condición es nombrada **consistencia débil**.

Para que un esquema cumpla la condición de consistencia estricta es necesario que el error sea proporcional a $\Delta\xi$ y $\Delta\eta$ (o a potencias de ellos) es decir el error debe ser un polinomio del término $\Delta\xi\Delta\eta$, es decir:

$$E.T. = \Delta\xi^{r_1} \Delta\eta^{m_1} K_1 + \Delta\xi^{r_2} \Delta\eta^{m_2} K_2 + \dots$$

Por otro lado para la consistencia débil el error puede ser de la forma:

$$E.T. = \frac{\Delta\xi^r}{\Delta\eta^m} K_1 + \dots$$

con $r > m$.

2.4.2 MALLAS IRREGULARES

El Teorema de Taylor en dos variables resulta de gran utilidad para producir esquemas generales sobre mallas que no son rectangulares, dichas mallas son denominadas mallas irregulares, y en general los esquemas vistos no son aplicables a ellas.

Teorema de Taylor

Consideremos una ecuación $u(\xi, \eta)$ continua, y con derivadas mixtas continuas hasta de orden N sobre una región $\Omega \subset \mathbb{R}^2$.

Dado un punto $\mathbf{x}_0 = (\xi_0, \eta_0) \in \Omega$, el valor de u en cualquier punto $\mathbf{x} = (\xi, \eta) \in \Omega$ puede escribirse como:

$$\begin{aligned} u(\mathbf{x}) = & u(\mathbf{x}_0) + (\xi - \xi_0) \frac{\partial u}{\partial \xi}(\mathbf{x}_0) + (\eta - \eta_0) \frac{\partial u}{\partial \eta}(\mathbf{x}_0) + \frac{(\xi - \xi_0)^2}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}(\mathbf{x}_0) + \\ & + (\xi - \xi_0)(\eta - \eta_0) \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}(\mathbf{x}_0) + \frac{(\eta - \eta_0)^2}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}(\mathbf{x}_0) + \dots \\ & + \frac{(\xi - \xi_0)^{N-m}}{(N-m)!} \frac{(\eta - \eta_0)^m}{m!} \frac{\partial^N u}{\partial \xi^{N-m} \partial \eta^m}(\mathbf{x}_0) + Q^{N+1} \end{aligned}$$

donde Q^{N+1} es el residuo de la serie.

2.4.2.1 Mallas triangulares

La aproximación de las ecuaciones diferenciales en ocasiones se realiza sobre mallas triangulares, analizaremos este método mediante la discretización de la ecn. de Poisson:

$$\Delta u = u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} = f(\xi, \eta) \quad (2.18)$$

Consideremos una malla triangular (ver fig. 2.1) con espacio de malla h , sea \mathbf{x}_0 un punto cualquiera de la malla, y $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_6$, ($\mathbf{x} = (\xi, \eta)$) sus nodos vecinos, podemos aproximar la primera derivada de $u(\xi, \eta) = u(\mathbf{x})$ en \mathbf{x}_0 en la dirección de \mathbf{x}^i para $i = 1, \dots, 6$, por la relación:

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}_0)^{(i)} \approx U_i(\mathbf{x}_0) \equiv \frac{u(\mathbf{x}_i) - u(\mathbf{x}_0)}{h} \quad (2.19)$$



Fig. 2-1: Malla triangular con espacio constante.

Ahora a partir de (2.19) construimos el operador:

$$\mathcal{L}(U(\mathbf{x})) = \sum_{i=1}^6 U_i(\mathbf{x}) \quad (2.20)$$

El operador (2.20) cumple la igualdad (teorema de Taylor):

$$\mathcal{L}(U) = \sum_{i=1}^6 \left(\frac{\partial u}{\partial \mathbf{x}} + \frac{h}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial \mathbf{x}^2} + \frac{h^2}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial \mathbf{x}^3} + \frac{h^3}{24} \frac{\partial^4 u}{\partial \mathbf{x}^4} + \frac{h^4}{120} \frac{\partial^5 u}{\partial \mathbf{x}^5} \right)^{(i)} + O(h^5) \quad (2.21)$$

Recordemos que:

$$\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \right)^{(i)} = \cos(\theta_i) \frac{\partial}{\partial \xi} + \sin(\theta_i) \frac{\partial}{\partial \eta} \quad (2.22)$$

donde θ_i es el ángulo entre la recta que une a \mathbf{x}_0 y \mathbf{x}_i y el eje ξ .

A partir de (2.22) podemos calcular las derivadas de orden superior:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \mathbf{x}^2} \right)^{(i)} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right) + \frac{1}{2} \cos(2\theta_i) \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right) + \sin(2\theta_i) \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta}$$

$$\left(\frac{\partial^3}{\partial \mathbf{x}^3} \right)^{(i)} = \frac{\cos(3\theta_i)}{4} \left(\frac{\partial^3}{\partial \xi^3} - 3 \frac{\partial^3}{\partial \xi \partial \eta^2} \right) + \frac{\sin(3\theta_i)}{4} \left(3 \frac{\partial^3}{\partial \xi^2 \partial \eta} - \frac{\partial^3}{\partial \eta^3} \right) +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{3}{4} \left(\cos(\theta_i) \frac{\partial}{\partial \xi} + \text{sen}(\theta_i) \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right) \\
\left(\frac{\partial^4}{\partial \mathbf{x}^4} \right)^{(i)} &= \frac{3}{8} \Delta^2 + \frac{\cos(4\theta_i)}{2} \left[\Delta^2 - 8 \frac{\partial^4}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} \right] + \\
& + \frac{\text{sen}(4\theta_i)}{2} \left(\frac{\partial^4}{\partial \xi^3 \partial \eta} - \frac{\partial^4}{\partial \xi \partial \eta^3} \right) + \frac{\cos(2\theta_i)}{2} \left(\frac{\partial^4}{\partial \xi^4} - \frac{\partial^4}{\partial \eta^4} \right) + \\
& \quad \text{sen}(2\theta_i) \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right) \\
\left(\frac{\partial^5}{\partial \mathbf{x}^5} \right)^{(i)} &= \frac{5}{8} \left(\cos(\theta_i) \frac{\partial}{\partial \xi} + \text{sen}(\theta_i) \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \Delta^2 + \\
& + \frac{5 \cos(3\theta_i)}{16} \left(\frac{\partial^5}{\partial \xi^5} - 2 \frac{\partial^5}{\partial \xi^3 \partial \eta^2} - 3 \frac{\partial^5}{\partial \xi \partial \eta^4} \right) - \\
& - \frac{5 \text{sen}(3\theta_i)}{16} \left(\frac{\partial^5}{\partial \eta^5} - 2 \frac{\partial^5}{\partial \xi^2 \partial \eta^3} - 3 \frac{\partial^5}{\partial \xi^4 \partial \eta} \right) + \\
& + \frac{\cos(5\theta_i)}{16} \left(\frac{\partial^5}{\partial \xi^5} + 5 \frac{\partial^5}{\partial \xi \partial \eta^4} - 10 \frac{\partial^5}{\partial \xi^3 \partial \eta^2} \right) + \\
& + \frac{\text{sen}(5\theta_i)}{16} \left(\frac{\partial^5}{\partial \eta^5} + 5 \frac{\partial^5}{\partial \xi^4 \partial \eta} - 10 \frac{\partial^5}{\partial \xi^2 \partial \eta^3} \right)
\end{aligned}$$

Donde Δ^2 no significa elevar al cuadrado sino aplicar el operador de Laplace en dos ocasiones

es decir:

$$\Delta^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right) + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right) \quad (2.23)$$

Finalmente debemos tomar en cuenta que para el seno y coseno se cumplen:

$$\sum_{i=1}^6 \cos(\alpha \theta_i) = \cos \left(\alpha \left(\theta + \frac{7}{6} \pi \right) \right) \times \begin{cases} \frac{\text{sen}(\alpha \pi)}{\text{sen}(\frac{\alpha \pi}{6})} & \frac{\alpha}{6} \notin Z \\ (-1)^{\frac{7\alpha}{6}} 6 & \frac{\alpha}{6} \in Z \end{cases}$$

$$\sum_{i=1}^6 \text{sen}(\alpha \theta_i) = \text{sen} \left(\alpha \left(\theta + \frac{1}{2} \pi \right) \right) \times \begin{cases} \frac{\text{sen}(\alpha \pi)}{\text{sen}(\frac{\alpha \pi}{6})} & \frac{\alpha}{6} \notin Z \\ (-1)^{\frac{5\alpha}{6}} 6 & \frac{\alpha}{6} \in Z \end{cases}$$

Al sustituir estas relaciones en (2.21) y realizar los cálculos tendremos:

$$\mathcal{L}(U) = \frac{3h}{2} \Delta u + \frac{3h^3}{32} \Delta^2 u + O(h^5)$$

De las ecuaciones (2.18) y (2.23) tenemos:

$$\Delta^2 u = \Delta f \quad (2.24)$$

Consideremos ahora el operador:

$$\Lambda U \equiv \frac{2}{3h} \mathcal{L}(U)$$

tenemos entonces:

$$\Lambda U = \Delta u + \frac{h^2}{16} \Delta^2 u + O(h^4) \quad (2.25)$$

Las funciones f y Δf son conocidas por lo que podemos definir:

$$\Psi = f + \frac{h^2}{16} \Delta f \quad (2.26)$$

A partir (2.24), (2.25) y (2.26) podemos construir el esquema en diferencias:

$$\Lambda U = \Psi$$

El cual aproxima a la ecuación de Poisson con orden 4.

2.4.2.2 Mallas arbitrarias

Consideremos una colección de \mathbf{P} puntos distintos $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_P\}$ distribuidos arbitrariamente sobre una región $\Omega \subset R^2$, una aproximación en diferencias a la derivada mixta

$$\frac{\partial^n u}{\partial \xi^m \partial \eta^{n-m}}(\xi_*)$$

esta dada por la combinación lineal:

$$\frac{\partial^n u}{\partial \xi^m \partial \eta^{n-m}}(\mathbf{x}_*) = \sum_{i=1}^P \Gamma_i u(\mathbf{x}_i) \quad (2.27)$$

De forma análoga al caso unidimensional, el teorema de Taylor nos lleva a la expresión:

$$\frac{\partial^n u}{\partial \xi^m \partial \eta^{n-m}}(\mathbf{x}_*) = B_{0,0} u(\mathbf{x}_*) + B_{1,0} \frac{\partial u}{\partial \xi}(\mathbf{x}_*) + B_{0,1} \frac{\partial u}{\partial \eta}(\mathbf{x}_*) + B_{2,0} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}(\mathbf{x}_*) + \dots$$

donde

$$B_{r,s} = \sum_{i=1}^P \frac{1}{r!s!} (\xi_i - \xi_*)^r (\eta_i - \eta_*)^s \Gamma_i \quad (2.28)$$

Por argumentos similares al caso unidimensional tenemos que $B_{m,n-m}$ debe ser igual a uno, lo que trae como consecuencia que las Γ_i sean proporcionales a $\Delta \xi^{-m} \Delta \eta^{-(n-m)}$ donde $\Delta \xi$ y $\Delta \eta$ son medidas generales para los espacios de malla en cada dirección ξ, η .

El requerimiento de la consistencia débil conduce a las condiciones:

$$B_{m,n-m} = 1 \quad (2.29)$$

$$B_{r,s} = 0 \quad r + s \leq n \quad (r, s) \neq (m, n - m) \quad (2.20-b)$$

Para derivadas de orden n se requieren, de acuerdo con estas condiciones, de $M = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$

ecuaciones.

Así un esquema débilmente consistente puede ser creado para aproximar una derivada de orden n utilizando M puntos de malla.

2.5 EL PROBLEMA DE DIRICHLET EN DOS DIMENSIONES

Veamos ahora el siguiente problema de valores en la frontera:

$$(\alpha f_\xi)_\xi + (\beta f_\xi)_\eta + (\beta f_\eta)_\xi + (\gamma f_\eta)_\eta = g \quad (2.30)$$

$$f(\xi, 0) = 0 \quad f(\xi, 1) = 0 \quad f(0, \eta) = 0 \quad f(1, \eta) = 0 \quad (2.31)$$

donde $\alpha, \beta, \gamma, \delta, g$, son funciones dadas que dependen de ξ, η .

Consideraremos una malla rectangular sobre el cuadrado unitario con pasos de malla constantes e iguales en las dos direcciones ξ, η , es decir $\Delta\xi = \Delta\eta$.

Con un procedimiento similar al realizado en una dimensión podemos obtener las siguientes aproximaciones:

$$(\alpha f_\xi)_\xi \approx \frac{\alpha_{i-\frac{1}{2},j} f_{i-1,j} - (\alpha_{i+\frac{1}{2},j} + \alpha_{i-\frac{1}{2},j}) f_{i,j} + \alpha_{i+\frac{1}{2},j} f_{i+1,j}}{\Delta\xi^2}$$

$$(\gamma f_\eta)_\eta \approx \frac{\gamma_{i,j-\frac{1}{2}} f_{i,j-1} - (\gamma_{i,j+\frac{1}{2}} + \gamma_{i,j-\frac{1}{2}}) f_{i,j} + \gamma_{i,j+\frac{1}{2}} f_{i,j+1}}{\Delta\eta^2}$$

Anteriormente se desarrolló un esquema para las derivadas mixtas, sin embargo, desarrollaremos un esquema diferente en virtud de simplificar los coeficientes del sistema que será obtenido.

Las derivadas f_ξ y f_η en el punto (ξ_i, η_j) puede aproximarse mediante el siguiente esquema:

$$(f_\xi)_{i,j} \approx \frac{f_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - f_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} + f_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} - f_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}}{2\Delta\xi} \quad (2.32)$$

$$(f_\eta)_{i,j} \approx \frac{f_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - f_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} + f_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - f_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}}{2\Delta\eta}$$

Observemos que este esquema es el análogo en dos dimensiones del esquema central visto para una dimensión.

De acuerdo con esto la expresión $(\beta f_\eta)_\xi$ puede aproximarse con el esquema:

$$\begin{aligned} (\beta f_\eta)_\xi &\approx \frac{(\beta f_\eta)_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - (\beta f_\eta)_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} + (\beta f_\eta)_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} - (\beta f_\eta)_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}}{2\Delta\xi} \approx \\ &\approx \frac{1}{4\Delta\eta\Delta\xi} \left[\left(\beta_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} (f_{i+1,j+1} - f_{i+1,j} + f_{i,j+1} - f_{i,j}) \right) \right] - \\ &\quad - \frac{1}{4\Delta\eta\Delta\xi} \left[\left(\beta_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} (f_{i,j+1} - f_{i,j} + f_{i-1,j+1} - f_{i-1,j}) \right) \right] + \\ &\quad + \frac{1}{4\Delta\eta\Delta\xi} \left[\left(\beta_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} (f_{i+1,j} - f_{i+1,j-1} + f_{i,j} - f_{i,j-1}) \right) \right] - \\ &\quad - \frac{1}{4\Delta\eta\Delta\xi} \left[\left(\beta_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} (f_{i,j} - f_{i,j-1} + f_{i-1,j} - f_{i-1,j-1}) \right) \right] \end{aligned}$$

Análogamente para $(\beta f_\xi)_\eta$ tenemos:

$$\begin{aligned} (\beta f_\xi)_\eta &\approx \frac{1}{4\Delta\eta\Delta\xi} \left[\left(\beta_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} (f_{i+1,j+1} - f_{i,j+1} + f_{i+1,j} - f_{i,j}) \right) \right] - \\ &\quad - \frac{1}{4\Delta\eta\Delta\xi} \left[\left(\beta_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} (f_{i+1,j} - f_{i,j} + f_{i+1,j-1} - f_{i,j-1}) \right) \right] + \\ &\quad + \frac{1}{4\Delta\eta\Delta\xi} \left[\left(\beta_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} (f_{i,j+1} - f_{i-1,j+1} + f_{i,j} - f_{i-1,j}) \right) \right] - \\ &\quad - \frac{1}{4\Delta\eta\Delta\xi} \left[\left(\beta_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} (f_{i,j} - f_{i-1,j} + f_{i,j-1} - f_{i-1,j-1}) \right) \right] \end{aligned}$$

De lo anterior tenemos que la suma $(\beta f_\xi)_\eta + (\beta f_\eta)_\xi$ puede ser aproximada por:

$$(\beta f_\xi)_\eta + (\beta f_\eta)_\xi \approx \frac{\left(\beta_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \right) f_{i+1,j+1} - \left(\beta_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \right) f_{i-1,j+1}}{4\Delta\xi^2} +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{-\left(\beta_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}\right) f_{i+1,j-1} + \left(\beta_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}\right) f_{i-1,j-1}}{4\Delta\xi^2} + \\
& + \frac{-\left(\beta_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - \beta_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - \beta_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} + \beta_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}\right) f_{i,j}}{4\Delta\xi^2}
\end{aligned} \tag{2.33}$$

Fig. 2-2: Orden de los coeficientes

Podemos ahora obtener el siguiente esquema de aproximación para la ecuación (ver figura 2-2):

$$\begin{aligned}
& NE_{i,j}f_{i+1,j+1} + N_{i,j}f_{i,j+1} + NO_{i,j}f_{i-1,j+1} + E_{i,j}f_{i+1,j} + O_{i,j}f_{i-1,j} + \\
& + SE_{i,j}f_{i+1,j-1} + S_{i,j}f_{i,j-1} + SO_{i,j}f_{i-1,j-1} + C_{i,j}f_{i,j} = 4\Delta\xi^2 g_{i,j}
\end{aligned} \tag{2.34}$$

donde los coeficientes están dados como sigue:

$$NE_{i,j} = \beta_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} ; \quad N_{i,j} = 4\gamma_{i,j+\frac{1}{2}} ; \quad NO_{i,j} = -\beta_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \tag{2.35}$$

$$SE_{i,j} = -\beta_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} ; \quad S_{i,j} = 4\gamma_{i,j-\frac{1}{2}} ; \quad SO_{i,j} = \beta_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} ; \tag{2.36}$$

$$O_{i,j} = 4\alpha_{i-\frac{1}{2},j} \quad ; \quad E_{i,j} = 4\alpha_{i+\frac{1}{2},j} ;$$

$$C_{i,j} = -(NO_{i,j} + N_{i,j} + NE_{i,j} + O_{i,j} + E_{i,j} + SO_{i,j} + S_{i,j} + SE_{i,j}) \tag{2.37}$$

$$G_{1_k} = 4\Delta\xi^2 g_{1,k} + NO_{1,k}f_{0,k-1} + N_{1,k}f_{0,k} + NE_{1,k}f_{0,k+1} \quad (2.31-b)$$

$$\begin{aligned} G_{1_{(M-1)}} &= 4\Delta\xi^2 g_{1,M-1} + NO_{1,M-1}f_{0,M-2} + N_{1,M-1}f_{0,M-1} + NE_{1,M-1}f_{0,M} + \\ &+ E_{1,M-1}f_{1,M} + SE_{1,M-1}f_{2,M} \end{aligned} \quad (2.31-c)$$

$$G_{k_1} = 4\Delta\xi^2 g_{k,1} + NO_{k,1}f_{k-1,0} + O_{k,1}f_{k,0} + SO_{k,1}f_{k+1,0} \quad (2.31-d)$$

$$G_{k_{(M-1)}} = 4\Delta\xi^2 g_{k,M-1} + NE_{k,M-1}f_{k-1,M} + E_{k,M-1}f_{k,M} + SE_{k,M-1}f_{k+1,M} \quad (2.31-e)$$

$$G_{(M-1)_1} = 4\Delta\xi^2 g_{M-1,1} + NO_{M-1,1}f_{0,0} + O_{1,1}f_{2,0} + SO_{M-1,1}f_{M,0} + S_{M-1,1}f_{M,1} + SE_{M-1,1}f_{M,2}. \quad (2.31-f)$$

$$G_{(M-1)_k} = 4\Delta\xi^2 g_{M-1,k} + SO_{M-1,k}f_{M,k-1} + S_{M-1,k}f_{M,k} + SE_{M-1,k}f_{M,k+1} \quad (2.31-g)$$

$$\begin{aligned} G_{(M-1)_1} &= 4\Delta\xi^2 g_{M-1,1} + NO_{M-1,1}f_{M-2,0} + O_{M-1,1}f_{M-1,0} + SO_{M-1,1}f_{M,0} + \\ &+ S_{M-1,1}f_{M,1} + SE_{M-1,1}f_{M,2} \end{aligned} \quad (2.31-h)$$

$$G_{(M-1)_k} = 4\Delta\xi^2 g_{M-1,k} + SO_{M-1,k}f_{M,k-1} + S_{M-1,k}f_{M,k} + SE_{M-1,k}f_{M,k+1}. \quad (2.31-i)$$

$$\begin{aligned} G_{(M-1)_{(M-1)}} &= 4\Delta\xi^2 g_{M-1,M-1} + NE_{M-1,M-1}f_{M-2,M} + E_{M-1,M-1}f_{M-1,M} + SE_{M-1,M-1}f_{M,M} + \\ &+ S_{M-1,M-1}f_{M,M-1} + SO_{M-1,M-1}f_{M,M-2} \end{aligned} \quad (2.31-j)$$

En todos los casos se tiene $2 \leq k \leq M - 2$.

Finalmente tenemos $G_{i_j} = 4\Delta\xi^2 g_{i,j}$ para los términos no especificados antes.

CAPITULO 3

GENERACION DE MALLAS EN EL PLANO

3.1 INTRODUCCION

Los métodos para la generación de mallas en una línea, tenían básicamente las mismas propiedades pues la ecuación correspondiente a un método puede transformarse en la de otro con sólo dar una función de peso adecuada.

La generación de mallas en el plano no conserva ésta característica, así un principio diferente nos conducirá a un ecuación diferente y por lo tanto la malla generada en cada caso tendrá propiedades geométricas distintas.

Una malla rectangular de dimensión $N_0 \times N_1$ sobre el cuadrado unitario I_2 esta dada por N_0 líneas verticales y N_1 líneas horizontales, incluyendo a las líneas de la frontera de I_2 , a estas líneas las identificaremos como **líneas de malla**

Observemos que las líneas de malla determinan una división del I_2 en rectángulos de $\frac{1}{N_0} \times \frac{1}{N_1}$; los cuales llamaremos **celdas** de la malla, a los vértices de las celdas los denominamos **nodos**.

Una malla rectangular sobre I_2 puede ser descrita por sus nodos de la siguiente manera:

Sean N_0 y N_1 dos números enteros positivos, los nodos de la malla (ξ_i, η_j) estarán dados por:

$$\xi_i = \frac{i}{N_0}, \quad 0 \leq i \leq N_0 \tag{3.1}$$

$$\eta_j = \frac{j}{N_1}, \quad 0 \leq j \leq N_1$$

Podemos definir aquí dos cantidades de gran importancia: $\Delta\xi = \frac{1}{N_0}$ y $\Delta\eta = \frac{1}{N_1}$

$\Delta\xi$ y $\Delta\eta$ son los **espacios de malla** en las direcciones ξ y η respectivamente.

Un caso particular de importancia es cuando $N_0 = N_1 = N$, entonces se dice que la malla es uniforme de dimensión N .

La idea que utilizaremos para la generación de mallas en el plano es una extensión del caso unidimensional, así pues dada una región simplemente conexa Ω deseamos hallar un mapeo suave de I_2 sobre Ω .

En adelante tomaremos a I_2 como el **espacio lógico** (o **región lógica**) con coordenadas (ξ, η) y a Ω como el **espacio físico** (o **región física**) con coordenadas (x, y) .

El problema ahora es el siguiente:

Dada una región simplemente conexa $\Omega \subseteq R^2$, debe encontrarse un mapeo $(x, y) \in C^n$ (con $n \geq 1$) de I_2 , sobre Ω , tal que mapea la frontera de I_2 (∂I_2) en la frontera de Ω ($\partial\Omega$), más específicamente queremos hallar

$$\begin{aligned} (x, y) &: I_2 \rightarrow \Omega \text{ con } x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi \neq 0 \\ &: \partial I_2 \rightarrow \partial\Omega \end{aligned}$$

Si denotamos por M al mapeo (x, y) el problema puede ser descrito de la siguiente manera:

Hallar $M \in C^n$ tal que

$$\begin{aligned} M &: I_2 \rightarrow \Omega; \quad J \neq 0 \\ &: \partial I_2 \rightarrow \partial\Omega \end{aligned}$$

donde J es el **Jacobiano** de la transformación.

Cuando el mapeo anterior ha sido determinado, diremos que **una malla de dimensión** $N_0 \times N_1$ **sobre la región** Ω es la imagen de una malla rectangular de dimensión $N_0 \times N_1$ sobre

I_2 bajo el mapeo M , las definiciones de **líneas de malla, celdas y nodos** son análogas a la de malla, así por ejemplo los nodos estarán dados por:

$$(x_{i,j}, y_{i,j}) \quad x_{i,j} = x(\xi_i, \eta_j); \quad y_{i,j} = y(\xi_i, \eta_j) \quad (3.2)$$

Diremos también que dos líneas de malla son **líneas paralelas** si son generadas por líneas paralelas en el sentido usual en I_2 .

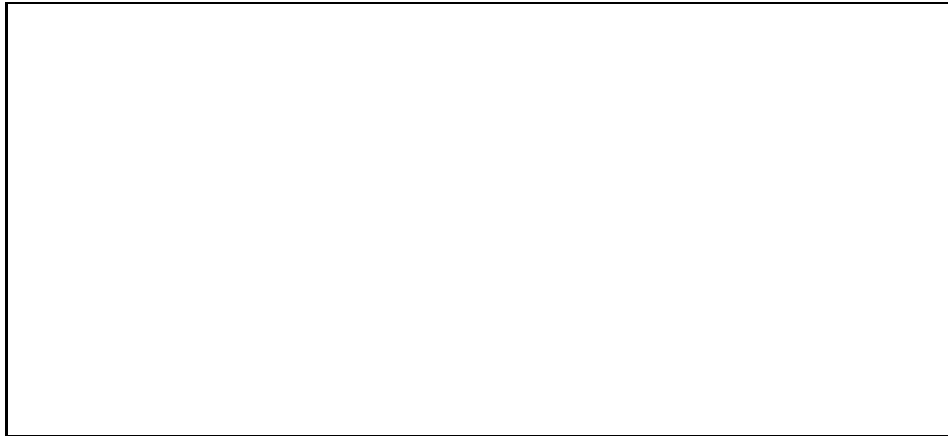


Fig. 3-1: La idea básica de la generación de mallas en el plano

En general el mapeo buscado no es único, así que es necesario establecer condiciones geométricas adicionales que determinen uno de ellos.

3.1.1 Diferentes mallas sobre el cuadrado unitario

El problema de generar mallas en el plano claramente es más complicado que en el caso unidimensional, y una de las razones de tal complicación es la variedad de maneras en que puede describirse la frontera de la región Ω , es decir las diferentes formas de llevar la frontera de I_2 hacia la frontera de Ω .

Una manera de dar un mapeo entre las fronteras de I_2 y las de Ω es determinar primero cuatro puntos sobre $\partial\Omega$, los cuales corresponderán a las esquinas del cuadrado unitario, es decir, si las esquinas del cuadrado están dadas por los puntos v_1, v_2, v_3, v_4 , entonces deberán elegirse los puntos w_1, w_2, w_3, w_4 los cuales determinarán cuatro secciones sobre la frontera de

Ω correspondientes a los lados del cuadrado.

Al determinar la correspondencia entre una esquina y uno de los puntos elegidos de $\partial\Omega$, la correspondencia de las fronteras estará determinada completamente, sin embargo la elección de estos cuatro puntos no es trivial pues tiene una infinidad de posibilidades, y en general dependerá de la forma de Ω .

Ejemplos

- a) Tomemos $\Omega = I_2$ y utilicemos un mismo generador de mallas ¹ con diferentes mapeos de frontera.

Fig. 3-2: Diferentes mapeos de frontera de I_2 , con el mismo generador.

- b) Por otro lado a un mismo mapeo de fronteras se le pueden aplicar diferentes métodos de generación, con lo cual se tiene una gran variedad de mallas sobre una misma región.
- c) Otro caso de importancia es la parametrización de las fronteras, pues cada lado del cuadrado determinará una sección de la frontera de Ω , y cada parte de $\partial\Omega$ puede parametrizarse de manera distinta, obteniendo diferentes distribuciones de nodos sobre cada una.

En los casos anteriores la distribución de los nodos sobre cada parte de la frontera se mantuvo uniforme, sin embargo en general podemos dar cualquier parametrización de las fronteras:

¹Las mallas han sido generadas con el método interpolación transfinita (TFI).



Fig. 3-3: Diversos métodos para generar mallas sobre un mismo mapeo de fronteras

$$x(\xi, 1) = x_N(\xi); \quad x(\xi, 0) = x_S(\xi); \quad x(1, \eta) = x_E(\eta); \quad x(0, \eta) = x_O(\eta) \quad (3.3)$$

$$y(\xi, 1) = y_N(\eta); \quad y(\xi, 0) = y_S(\xi); \quad y(1, \eta) = y_E(\eta); \quad y(0, \eta) = y_O(\eta)$$

donde los subíndices indican la región de la frontera en el espacio lógico (norte, sur, este y oeste)

O bien en forma vectorial:

$$M(\xi, 1) = M_N(\xi) , M(\xi, 0) = M_S(\xi) \quad (3.4)$$

$$M(1, \eta) = M_E(\eta), M(0, \eta) = M_O(\eta)$$

Una **condición importante** de estos mapeos es la **continuidad** en las esquinas de I_2 .

Nuevamente la malla cambiará sin tener que variar el método que la genera.

3.2 METODOS SENCILLOS PARA GENERAR MALLAS

3.2.1 El generador T.F.I.

La generación de mallas por métodos algebraicos resulta de interés por la simplicidad y rapidez con la que pueden ser calculadas las líneas de malla, uno de los métodos algebraicos mas sencillos es el de **interpolación transfinita (T.F.I.)**, este consiste en obtener un mapeo a partir de un conjunto de funciones que determinan la frontera de la región Ω y un conjunto de funciones de

Fig. 3-4: Diferentes parametrizaciones de las fronteras de I_2 , usando el mismo generador de mallas

interpolación.

Consideremos al conjunto de funciones x_S, x_N, y_S, y_N del mapeo de fronteras (3.3) y los polinomios de interpolación de Lagrange de grado 1:

$$\Phi_0 = (1 - \eta) \quad \Phi_1 = \eta$$

con esto, formemos el siguiente mapeo \mathbf{M}_1 :

$$\begin{aligned} x(\xi, \eta) &= (1 - \eta)x_S + \eta x_N \\ y(\xi, \eta) &= (1 - \eta)y_S + \eta y_N \end{aligned}$$

Analogamente podemos construir el mapeo \mathbf{M}_2 :

$$\begin{aligned} x(\xi, \eta) &= (1 - \xi)x_O + \xi x_E \\ y(\xi, \eta) &= (1 - \xi)y_O + \xi y_E \end{aligned}$$

Estos mapeos tienen el inconveniente de que ignoran la información de 2 de las cuatro fronteras por lo que la frontera de Ω no se conserva en su totalidad.

Definamos el producto de \mathbf{M}_1 y \mathbf{M}_2 como sigue:

$$\mathbf{M}_1 \cdot \mathbf{M}_2 = \xi(1 - \eta)M_S(1) + \xi\eta M_N(1) + (1 - \eta)(1 - \xi)M_S(0) + \eta(1 - \xi)M_N(0)$$

con M_N y M_S como en (3.4), y formemos finalmente el mapeo buscado de la siguiente forma:

$$M = \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2 - \mathbf{M}_1 \cdot \mathbf{M}_2$$

Este en coordenadas tiene la forma:

$$\begin{aligned} x(\xi, \eta) &= [(1 - \eta)x_S(\xi) + \eta x_N(\xi) + (1 - \xi)x_O(\eta) + \xi x_E(\eta)] \\ &\quad - [\xi(1 - \eta)x_S(1) + \xi\eta x_N(1) + (1 - \eta)(1 - \xi)x_S(0) + \eta(1 - \xi)x_N(0)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y(\xi, \eta) &= [(1 - \eta)y_S(\xi) + \eta y_N(\xi) + (1 - \xi)y_O(\eta) + \xi y_E(\eta)] \\ &\quad - [\xi(1 - \eta)y_S(1) + \xi\eta y_N(1) + (1 - \eta)(1 - \xi)y_S(0) + \eta(1 - \xi)y_N(0)] \end{aligned}$$

Un analisis detallado de este proceso puede consultarse en Gonzalez [3].

Los métodos algebraicos ofrecen un gran control sobre los nodos de la malla sin embargo no poseen control sobre otras propiedades importantes tales como la suavidad o la ortogonalidad de las líneas de malla.

Debido a la facilidad de los métodos algebraicos las mallas generadas suelen ser usadas como mallas iniciales que serán modificadas por otros métodos para obtener propiedades de interés.

3.2.2 El generador A.H.

Las mallas generadas deben cumplir ciertas condiciones para poder ser consideradas útiles en los procesos numéricos, una de las principales es la **suavidad**, pues si una malla no es suave puede producir que los métodos de solución, del sistema algebraico generado, se retrasen o incluso no converjan.

Los métodos algebraicos tienen un costo computacional muy bajo, sin embargo en general no garantizan suavidad en las mallas producidas por lo que éstas deben ser "suavizadas", esto puede realizarse usando métodos de suavizamiento o bien utilizando a la malla generada como una malla inicial para algún otro método generador.

Uno de los métodos de suavizamiento más sencillos consiste en el siguiente procedimiento:

Sea $q_{i,j} = (x_{i,j}, y_{i,j})$ un punto de la malla, donde $x_{i,j} = x(\xi_i, \eta_j)$, $y_{i,j} = y(\xi_i, \eta_j)$, el valor de $q_{i,j}$ es cambiado por el promedio de los puntos de la malla "vecinos" a él, es decir:

$$q_{i,j} = \frac{q_{i-1,j} + q_{i+1,j} + q_{i,j-1} + q_{i,j+1}}{4}$$

o bien en coordenadas:

$$x_{i,j} = \frac{x_{i-1,j} + x_{i+1,j} + x_{i,j-1} + x_{i,j+1}}{4}$$

$$y_{i,j} = \frac{y_{i-1,j} + y_{i+1,j} + y_{i,j-1} + y_{i,j+1}}{4}$$

Este proceso se realiza con cada punto de la malla obteniendo así una nueva malla la cual es más suave que la original.

La pregunta que debemos responder ahora es ¿Qué tan suave puede llegar a ser la malla después de aplicar este método varias veces?, para ver esto consideraremos la ecuación para la función de la coordenada x , esta puede escribirse como :

$$x_{i-1,j} + x_{i+1,j} + x_{i,j-1} + x_{i,j+1} - 4x_{i,j} = 0$$

al separar los términos correspondientes a i de lo de j tenemos:

$$(x_{i-1,j} - 2x_{i,j} + x_{i+1,j}) + (x_{i,j-1} - 2x_{i,j} + x_{i,j+1}) = 0$$

Por otro lado si suponemos que los espacios de malla son iguales, es decir $\Delta\xi = \Delta\eta$ tenemos al dividir por $\Delta\xi^2$:

$$\frac{(x_{i-1,j} - 2x_{i,j} + x_{i+1,j})}{\Delta\xi^2} + \frac{(x_{i,j-1} - 2x_{i,j} + x_{i,j+1})}{\Delta\eta^2} = 0$$

Si x es una función dos veces diferenciable entonces podemos tomar el límite cuando $\Delta\xi \rightarrow 0$ en la última expresión obteniendo así la ecuación diferencial:

$$x_{\xi\xi} + x_{\eta\eta} = 0$$

La misma ecuación es obtenida para y , por lo que se tiene el sistema:

$$\begin{aligned} x_{\xi\xi} + x_{\eta\eta} &= 0 \\ y_{\xi\xi} + y_{\eta\eta} &= 0 \end{aligned} \tag{3.5}$$

cuyas condiciones de frontera están dadas por el mapeo de fronteras entre I_2 y Ω .

El sistema es lineal, elíptico y desacoplado, todo esto contribuye a que la implementación numérica sea muy sencilla, y por lo tanto el costo computacional sea reducido.

El sistema de ecuaciones obtenido es conocido como generador A.H., y es una extensión del generador de Poisson visto en el caso unidimensional.

Una cuestión de importancia es si el jacobiano es distinto de cero (es decir si el mapeo es biyectivo), la respuesta desafortunadamente es no, el generador A.H. generalmente produce mallas con doblez en regiones físicas no convexas, es decir, genera puntos de la malla fuera de la región Ω , sin embargo resulta muy eficiente en regiones convexas donde la pendiente de la frontera tiene variaciones muy grandes (picos), pues en tales casos los métodos algebraicos producen mallas sin suavidad y otro tipo de generadores resultan muy costosos en comparación con el A.H.

3.2.2.1 Implementación numérica del generador A.H.

La implementación en diferencias finitas de la ecuación de Laplace resulta muy sencilla aplicando las fórmulas obtenidas en la sección 2.5 a la ecuación de Laplace:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = 0$$

sobre el cuadrado unitario I_2 , con condición de frontera:

$$u(\xi, \eta) = f(\xi, \eta)$$

para todo punto (ξ, η) en la frontera de I_2 , las cuales para este, caso usando una malla uniforme de dimensión N , se reducen a la forma:

$$\mathbf{A}\mathbf{U} = \mathbf{k}$$

donde \mathbf{A} es la matriz tridiagonal por bloques de orden $(N - 1)^2$ dada por :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\mathbf{B} & \mathbf{J} & & & \\ -\mathbf{J} & \mathbf{B} & -\mathbf{J} & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & -\mathbf{J} & \mathbf{B} & -\mathbf{J} \\ & & & & -\mathbf{J} & \mathbf{B} \end{bmatrix}$$

con \mathbf{B} la matriz de dimensión $N - 1$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 4 & -1 & & & \\ -1 & 4 & -1 & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & -1 & 4 & -1 \\ & & & & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

y \mathbf{J} la matriz identidad de dimensión $N - 1$.

Los elementos del vector \mathbf{k} dependen de los valores de la función u en la frontera de I_2 .

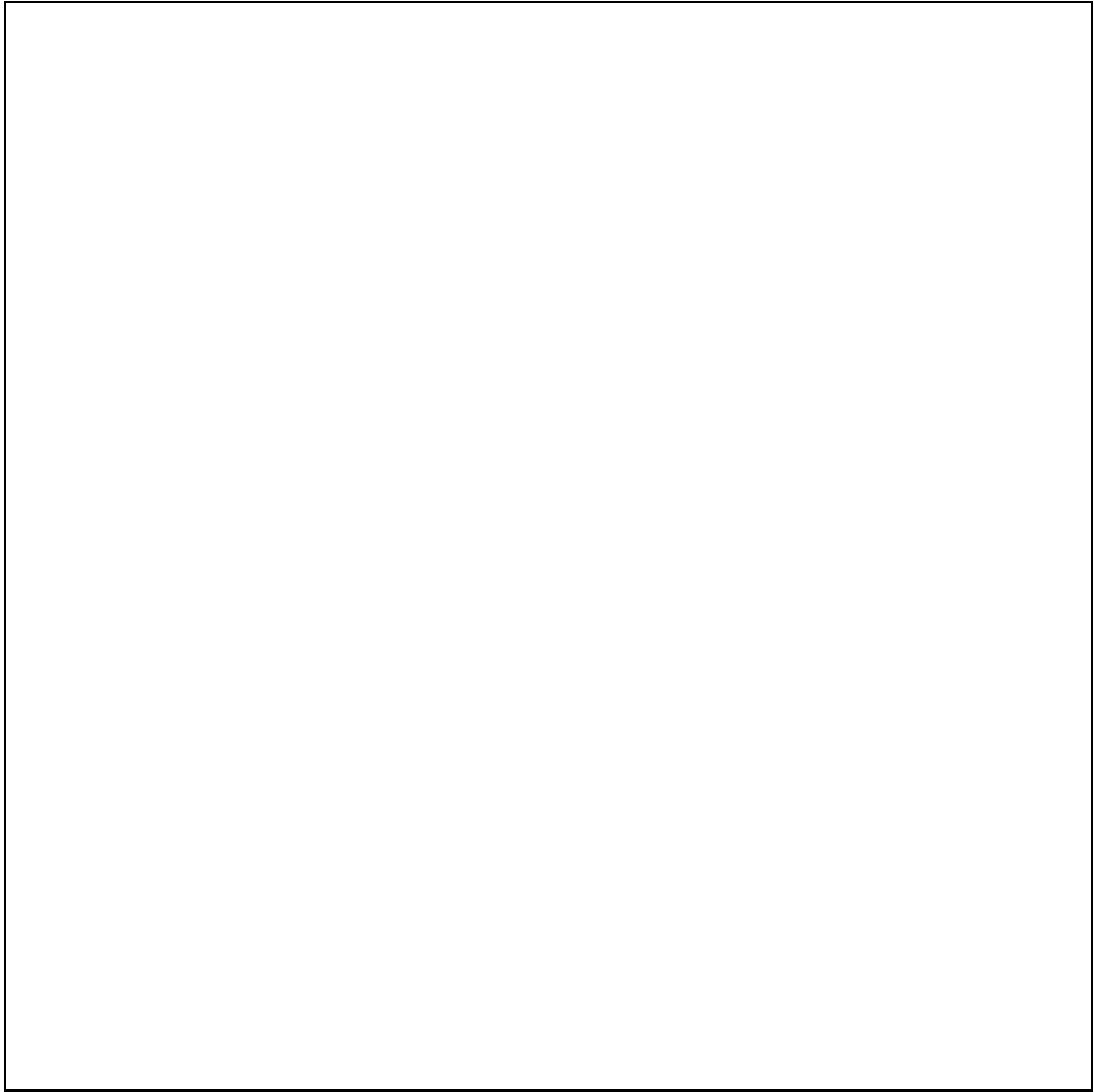


Fig. 3-5: Mallas obtenidas por el generador AH

3.3 METODOS VARIACIONALES

La búsqueda de nuevos generadores de mallas bidimensionales es un problema que presenta diversas dificultades, tanto en teoría (justificación matemática) como en la práctica (implementación computacional) pues deben tomarse en cuenta una gran cantidad de situaciones geométricas y analíticas.

Existen diversos métodos para tratar de resolver este problema, a continuación estudiaremos aquellos que están relacionados con el cálculo variacional, estos son conocidos como **métodos variacionales**.

La intención principal de los métodos variacionales no es precisamente generar mallas sino buscar el mejor generador para un problema dado es decir, la pregunta que se intenta responder es ¿Qué restricciones debe cumplir el mapeo M para que la malla tenga una propiedad específica?, para esto podemos hacer uso de la intuición así como de la interpretación geométrica de ciertas expresiones matemáticas.

El principio de Dirichlet

Uno de los resultados más importantes en matemáticas, es el principio de Dirichlet, el cual establece la conexión entre el cálculo de variaciones y las ecuaciones diferenciales.

Tomemos el siguiente problema:

Deseamos hallar una función Φ_0 tal que la funcional $I_{[\Phi]}$ alcance su valor mínimo, donde $I_{[\Phi]}$ esta definida como sigue:

$$I_{[\Phi]} = \iint_G (\Phi_\xi^2 + \Phi_\eta^2) \partial\xi \partial\eta$$

Con condición de frontera:

$$\Phi(\partial G) = f(\xi, \eta)$$

El principio de Dirichlet establece que si $\Phi_0 = U(\xi, \eta)$ minimiza a $I_{[\Phi]}$ entonces U es una función armónica, es decir satisface la ecuación de Laplace

$$U_{\xi\xi} + U_{\eta\eta} = 0$$

para todo $(\xi, \eta) \in G$

Así, el principio de Dirichlet nos sugiere que el generador A.H. puede ser visto desde el calculo variacional como la solución a un problema de minimización.

Esta idea será desarrollada en la siguiente sección.

3.3.1 La funcional de longitud

Iniciaremos con uno de los casos mas sencillos, en éste se interpreta a la malla como la intersección de curvas en la región física.

Recordemos que la idea es hallar un mapeo del cuadrado unitario, en la región Ω del espacio lógico, así que cada línea definida en I_2 al mantener ξ o η constante determinará una curva sobre Ω , el problema que se plantea ahora es el siguiente:

Se desea generar una malla de N_0 puntos en la dirección x y N_1 puntos en la dirección y , en la cual se controle la longitud de las curvas definidas por las líneas η (y ξ) constantes por medio de una función de peso dada.

Cada curva de la malla para η constante esta dada por:

$$\sigma_j(\xi) = (x(\xi, \eta_j), y(\xi, \eta_j)) \quad (3.6)$$

Para $j = 0, 1, \dots, N_1$.

La longitud $l_{i,j}$ de la curva σ_j entre los puntos ξ_i y ξ_{i+1} puede aproximarse por:

$$l_{i,j}^2 \approx (x_{i+1,j} - x_{i,j})^2 + (y_{i+1,j} - y_{i,j})^2$$

Queremos que la longitud $l_{i,j}$ sea proporcional a una función $\sqrt{\Phi}$ (con $\Phi(\xi, \eta) > 0$) y al espacio de malla $\Delta\xi$, es decir deseamos que se cumpla la igualdad:

$$(x_{i+1,j} - x_{i,j})^2 + (y_{i+1,j} - y_{i,j})^2 = K \Delta \xi^2 \Phi_{i+\frac{1}{2},j}$$

La idea es que la longitud no tenga variaciones grandes de un intervalo a otro, pues esta situación restaría suavidad a la malla.

La idea anterior es equivalente a pedir que la longitud total de la curva σ_j sea lo mas pequeña posible, es decir queremos minimizar la suma:

$$\sum_{i=1}^{N_0-1} l_{i,j}^2 = L_j^2 \equiv \sum_{i=1}^{N_0-1} K \Delta \xi^2 \Phi_{i+\frac{1}{2},j}$$

Por otro lado nosotros deseamos controlar las curvas en todos los niveles de j , es decir debe minimizarse la suma:

$$\mathbf{S}_H = \sum_{i=1}^{N_0-1} (L_{x_j})^2 = \sum_{j=1}^{N_1-1} \sum_{i=1}^{N_0-1} K \Delta \xi^2 \Phi_{i+\frac{1}{2},j}$$

es decir se tiene:

$$\sum_{j=1}^{N_1-1} \sum_{i=1}^{N_0-1} [(x_{i+1,j} - x_{i,j})^2 + (y_{i+1,j} - y_{i,j})^2] = \sum_{j=1}^{N_1-1} \sum_{i=1}^{N_0-1} K \Delta \xi^2 \Phi_{i+\frac{1}{2},j}$$

al dividir cada lado por $\Delta \xi^2 \Phi_{i+\frac{1}{2},j}$ tenemos:

$$\sum_{j=0}^{N_1-1} \sum_{i=0}^{N_0-1} \frac{[(x_{i+1,j} - x_{i,j})^2 + (y_{i+1,j} - y_{i,j})^2]}{\Delta \xi^2 \Phi_{i+\frac{1}{2},j}} = K N_0 N_1$$

recordemos que $\Delta \xi = \frac{1}{N_0}$, $\Delta \eta = \frac{1}{N_1}$ así al multiplicar por $\Delta \xi \Delta \eta$ tenemos:

$$\sum_{j=0}^{N_1-1} \sum_{i=1}^{N_0-1} \frac{[(x_{i+1,j} - x_{i,j})^2 + (y_{i+1,j} - y_{i,j})^2]}{\Delta \xi^2 \Phi_{i+\frac{1}{2},j}} \Delta \xi \Delta \eta = K$$

Por último si tomamos el limite cuando $\Delta \xi$ y $\Delta \eta$ tienden a cero, el lado derecho de la expresión anterior converge a:

$$I_{1[x,y]} \equiv \int_0^1 \int_0^1 \frac{x_\xi^2 + y_\xi^2}{\Phi} \partial\xi \partial\eta$$

De manera análoga al considerar las líneas ξ -constantes, con una función de peso $\Psi(\xi, \eta) > 0$ tenemos la expresión:

$$I_{2[x,y]} \equiv \int_0^1 \int_0^1 \frac{x_\eta^2 + y_\eta^2}{\Psi} \partial\xi \partial\eta$$

Estas integrales nos permiten "medir" en cierta forma la longitud de las curvas que generan las mallas, así para obtener la propiedad descrita inicialmente podemos considerar aquellas funciones (x, y) que minimicen a estas integrales, es decir, para controlar la longitud de las curvas podemos considerar el promedio de las dos últimas expresiones

$$I_{L[x,y]} = \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^1 \left[\frac{x_\xi^2 + y_\xi^2}{\Phi} + \frac{x_\eta^2 + y_\eta^2}{\Psi} \right] \partial\xi \partial\eta \quad (3.7)$$

o bien en términos de $M = (x, y)$:

$$I_{L[M]} = \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^1 \left[\frac{|M_\xi|^2}{\Phi} + \frac{|M_\eta|^2}{\Psi} \right] \partial\xi \partial\eta \quad (3.8)$$

Esta expresión es conocida como **funcional de longitud**.

La malla buscada será generada mediante el mapeo que minimice la funcional 3.8 bajo las condiciones de frontera 3.3.

Nuestro problema ahora es el de minimizar esta funcional bajo las condiciones de frontera dadas por el mapeo de fronteras entre I_2 y la región Ω .

Para minimizar la funcional (3.7) consideramos la función F definida como sigue:

$$F(\epsilon) = I_{L[M+\epsilon C]}$$

donde $C = (C_1, C_2)$ es una función dos veces diferenciable definida en I_2 tal que $C(\xi, \eta) = 0$ para todo punto (ξ, η) sobre la frontera de I_2 .

Observemos que la función C no cumple las condiciones de frontera establecidas para M ,

sin embargo la función $M + \epsilon C$ si las cumple, por lo que si M es la función que minimiza la funcional (3.7) entonces $\epsilon = 0$ será un mínimo para $F(\epsilon)$, así debe cumplirse que $F'(0) = 0$ es decir :

$$F'(0) = \mathbf{D}_\epsilon (I_{L[x+\epsilon C_1, y+\epsilon C_2]})_{\epsilon=0} = 0$$

$$\mathbf{D}_\epsilon \left(\frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^1 \left[\frac{(x + \epsilon C_1)_\xi^2 + (y + \epsilon C_2)_\xi^2}{\Phi} + \frac{(x + \epsilon C_1)_\eta^2 + (y + \epsilon C_2)_\eta^2}{\Psi} \right] \partial\xi \partial\eta \right)_{\epsilon=0} = 0$$

Al reducir la última expresión tenemos:

$$\int_0^1 \int_0^1 \left[\frac{(x_\xi C_{1\xi} + y_\xi C_{2\xi})}{\Phi} + \frac{(x_\eta C_{1\eta} + y_\eta C_{2\eta})}{\Psi} \right] \partial\xi \partial\eta = 0$$

Finalmente al integrar por partes y agrupar términos:

$$\int_0^1 \int_0^1 \left[\left(\left(\frac{x_\xi}{\Phi} \right)_\xi + \left(\frac{x_\eta}{\Psi} \right)_\eta \right) C_1 + \left(\left(\frac{y_\xi}{\Phi} \right)_\xi + \left(\frac{y_\eta}{\Psi} \right)_\eta \right) C_2 \right] \partial\xi \partial\eta = 0$$

La igualdad anterior debe cumplirse para cualquier función C en el espacio de variación admisible de la funcional, de acuerdo con el lema fundamental del calculo de variaciones esto solo es posible si:

$$\left(\frac{x_\xi}{\Phi} \right)_\xi + \left(\frac{x_\eta}{\Psi} \right)_\eta = 0$$

$$\left(\frac{y_\xi}{\Phi} \right)_\xi + \left(\frac{y_\eta}{\Psi} \right)_\eta = 0$$

o bien en forma vectorial :

$$\left(\frac{M_\xi}{\Phi} \right)_\xi + \left(\frac{M_\eta}{\Psi} \right)_\eta = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

esta ecuación es llamada la **ecuación de Euler-Lagrange** para la funcional de longitud.

El sistema de ecuaciones obtenido es desacoplado y lineal.

Finalmente el sistema puede ser desarrollado obteniendo todas las derivadas parciales en-

vueltas en él, con ésto se llega a la forma

$$\Pi_{11}M_{\xi\xi} + \Pi_{12}M_{\xi\eta} + \Pi_{22}M_{\eta\eta} + S = 0 \quad (3.9)$$

donde

$$\Pi_{11} = \frac{1}{\Phi}J_2 \quad \Pi_{12} = 0J_2 \quad \Pi_{22} = \frac{1}{\Psi}J_2 \quad \text{con} \quad J_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$S = \begin{bmatrix} -\frac{\Phi_\xi}{\Phi^2}x_\xi & -\frac{\Psi_\eta}{\Psi^2}x_\eta \\ -\frac{\Phi_\xi}{\Phi^2}y_\xi & -\frac{\Psi_\eta}{\Psi^2}y_\eta \end{bmatrix}$$

3.3.1.1 Elipticidad

Recordemos que Φ y Ψ son funciones positivas definidas en $I_2 \cup \partial I_2$, así que tienen un máximo definido, sea K una constante definida así:

$$\frac{1}{K} = \max(\max \Phi, \max \Psi)$$

entonces se tiene que

$$\det [\Pi_{11}\omega_1^2 + \Pi_{22}\omega_2^2] = \left(\frac{\omega_1^2}{\Phi} + \frac{\omega_2^2}{\Psi} \right)^2 \geq C(\omega_1^2 + \omega_2^2)^2$$

para todo $(\omega_1, \omega_2) \in \mathbb{R}^2$, esta desigualdad es la condición de **elipticidad**, es decir hemos visto que el sistema de ecuaciones es elíptico, por lo tanto la solución es suave, además el sistema es relativamente sencillo de resolver lo cual hace muy atractivo este método para generar mallas.

Debido a las características del sistema se sabe que la solución existe y es única para funciones de peso suaves y condiciones de frontera continuas.

Al igual que en el caso unidimensional el mayor problema consiste en hallar las funciones de peso, pues no es sencillo determinar el efecto que éstas tendrán en la malla generada sobre la región física Ω .

Funciones de peso constantes

El caso mas simple para las funciones de peso es tomar $\Phi = \Psi = K$ con K una constante positiva, esto lleva el sistema a:

$$x_{\xi\xi} + x_{\eta\eta} = 0$$

$$y_{\xi\xi} + y_{\eta\eta} = 0$$

este sistema corresponde al generador A.H. el cual como ya se dijo antes tiene su principal limitación cuando la región Ω no es convexa.

Un caso con mejores resultados pero igualmente simple es tomar $\Phi = K_0^2$, $\Psi = K_1^2$, esto nos conduce al sistema:

$$K^2 x_{\xi\xi} + x_{\eta\eta} = 0 \tag{3.10}$$

$$K^2 y_{\xi\xi} + y_{\eta\eta} = 0$$

con $K = \frac{K_0}{K_1}$.

El valor de K tiene un efecto de "estiramiento" o de "aflojamiento" sobre las líneas de la malla por lo que para ciertos valores de K se eliminará el efecto de doblez causado por el generador A.H. mientras que para otros valores el doblez será aún mayor.



Fig. 3-6: Efecto del valor de K sobre las mallas.

El valor de K depende del mapeo de fronteras que se elija entre I_2 y Ω , por lo que en general

pueden hallarse varios valores de K para los cuales el dobléz de la malla se corrija.

El costo computacional de este generador es prácticamente el mismo que para el generador A.H., sin embargo, los resultados en general son mucho mejores.

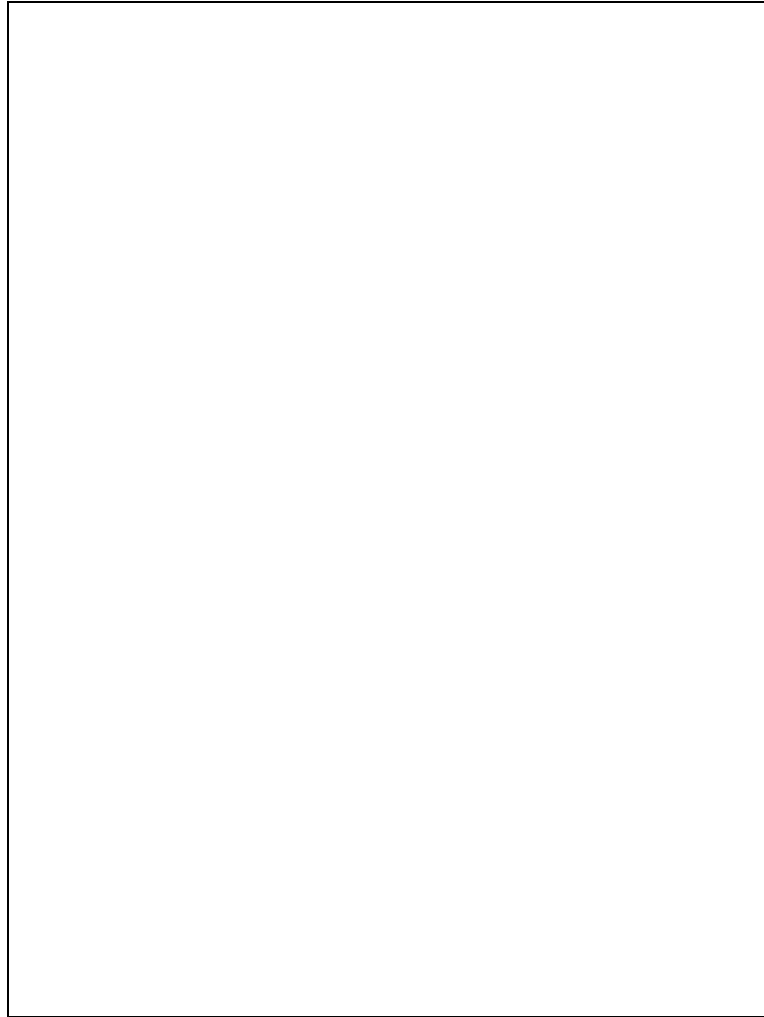


Fig. 3-7: Mallas generadas por longitud con pesos constantes

3.3.2 La funcional de área

Una nueva funcional será obtenida ahora mediante una idea geométrica diferente

Consideremos ahora el área encerrada por las curvas de la malla, una distribución uniforme de dichas áreas ayudará a evitar variaciones muy grandes en las aproximaciones de una celda a otra, por lo que ahora se desea controlar el área de las celdas de la malla mediante una función de peso $\Phi(\xi, \eta) > 0$.

Denotaremos por $a_{i,j}$ al área de la celda limitada por las líneas $\xi_i; \xi_{i+1}; \eta_j; \eta_{j+1}$ en I_2 y por $A_{i,j}$ al área de la celda en Ω sobre la cual es mapeada.

La suma de todas las $A_{i,j}$ es constante, pues es igual al área de la región Ω ($A(\Omega)$).

$$\sum_{i,j} A_{i,j} = A(\Omega) \quad (3.11)$$

Por otro lado el área de cada celda puede ser aproximada por:

$$A_{i,j} \approx (x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi)_{i,j} \Delta\xi \Delta\eta = J a_{i,j} \quad (3.12)$$

Tenemos de (3.11) y (3.12):

$$\sum_i^{N_0-1} \sum_j^{N_1-1} J_{i,j} a_{i,j} \approx A(\Omega)$$

Como ya hemos dicho la suma de las áreas es constante, sin embargo si consideramos la suma de los cuadrados de las áreas esta dependerá de la variación del área entre las celdas, así la idea ahora es minimizar esta suma, es decir, el problema es:

Minimizar:

$$S_A \equiv \sum_i^{N_0-1} \sum_j^{N_1-1} (J_{i,j} a_{i,j})^2 \quad (3.13)$$

bajo la restricción:

$$\sum_i^{N_0-1} \sum_j^{N_1-1} J_{i,j} a_{i,j} = \mathbf{K} \quad (3.14)$$

y sujeta a las condiciones de frontera establecidas por el mapeo entre las fronteras de I_2 y Ω .

Ahora si aplicamos un proceso similar al utilizado para hallar la funcional de longitud, obtendremos la funcional:

$$I_{A[x,y]} \equiv \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^2 \frac{J^2}{\Phi} d\xi d\eta \quad (3.15)$$

esta es la **funcional de área** cuyas ecuaciones de Euler-Lagrange son:

La restricción (3.14) será cumplida por cualquier difeomorfismo entre I_2 y Ω , por lo que no afectará el proceso de minimización utilizado sobre (3.13).

Las ecuaciones de Euler-Lagrange para la funcional de área son:

$$\left(\frac{Jx_\eta}{\Phi} \right)_\xi - \left(\frac{Jx_\xi}{\Phi} \right)_\eta = 0$$

$$\left(\frac{Jy_\eta}{\Phi} \right)_\xi - \left(\frac{Jy_\xi}{\Phi} \right)_\eta = 0$$

o bien en forma vectorial

$$\left(\frac{JM_\eta}{\Phi} \right)_\xi - \left(\frac{JM_\xi}{\Phi} \right)_\eta = 0$$

y al desarrollar las derivadas en la última expresión tenemos:

$$\left(\frac{J}{\Phi} \right)_\xi M_\eta - \left(\frac{J}{\Phi} \right)_\eta M_\xi = 0$$

finalmente podemos escribir la ecuación en la forma:

$$\Pi_{11}M_{\xi\xi} + \Pi_{12}M_{\xi\eta} + \Pi_{22}M_{\eta\eta} + S = 0$$

donde

$$\Pi_{11} = \begin{bmatrix} y_\eta^2 & -x_\eta y_\eta \\ -x_\eta y_\eta & x_\eta^2 \end{bmatrix} \quad \Pi_{22} = \begin{bmatrix} y_\xi^2 & -x_\xi y_\xi \\ -x_\xi y_\xi & x_\xi^2 \end{bmatrix}$$

$$\Pi_{12} = \begin{bmatrix} -2y_\xi y_\eta & x_\xi y_\eta + x_\eta y_\xi \\ x_\xi y_\eta + x_\eta y_\xi & -2x_\xi x_\eta \end{bmatrix} \quad S = -\frac{J}{\Phi} \begin{bmatrix} y_\eta & -y_\xi \\ -x_\eta & x_\xi \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_\xi \\ \Phi_\eta \end{pmatrix}$$

Así que el sistema de ecuaciones para la funcional de área usando $\Phi \equiv 1$ es:

$$(y_\eta^2)x_{\xi\xi} - (x_\eta y_\eta)y_{\xi\xi} - (2y_\xi y_\eta)x_{\xi\eta} + (x_\xi y_\eta + x_\eta y_\xi)y_{\xi\eta} + (y_\xi^2)x_{\eta\eta} - (x_\xi y_\xi)y_{\eta\eta} = 0$$

$$-(x_\eta y_\eta)x_{\xi\xi} + (x_\eta^2)y_{\xi\xi} + (x_\xi y_\eta + x_\eta y_\xi)x_{\xi\eta} - (2x_\xi x_\eta)y_{\xi\eta} - (x_\xi y_\xi)x_{\eta\eta} + (x_\xi^2)y_{\eta\eta} = 0$$

En contraste con el caso de longitud ahora las matrices $\Pi_{i,j}$ no dependen de la función de peso.

Observemos que la ecuación de Euler-Lagrange para la funcional de área es un sistema no lineal y acoplado, por lo que su solución es mas complicada de hallar que en el caso de longitud, incluso puede ser que la solución no exista para ciertas funciones de peso o para algunas regiones Ω (condiciones de frontera).

Hasta el momento no hay teoremas sobre la existencia o unicidad de la solución pero la experiencia computacional indica que es posible hallar problemas sin solución, pero cuando ésta existe parece ser única.

Tampoco se puede garantizar la suavidad de las mallas generadas pues la ecuación no es elíptica.

A pesar de las limitaciones de la funcional de área se han obtenido algunos buenos resultados sobre ciertas regiones no convexas en las cuales la funcional de longitud falla.

En la mayoría de estos casos las mallas obtenidas son convexas, e incluso se han obtenido

mallas suaves sobre algunas regiones, en general esta última propiedad depende de la suavidad de la frontera.

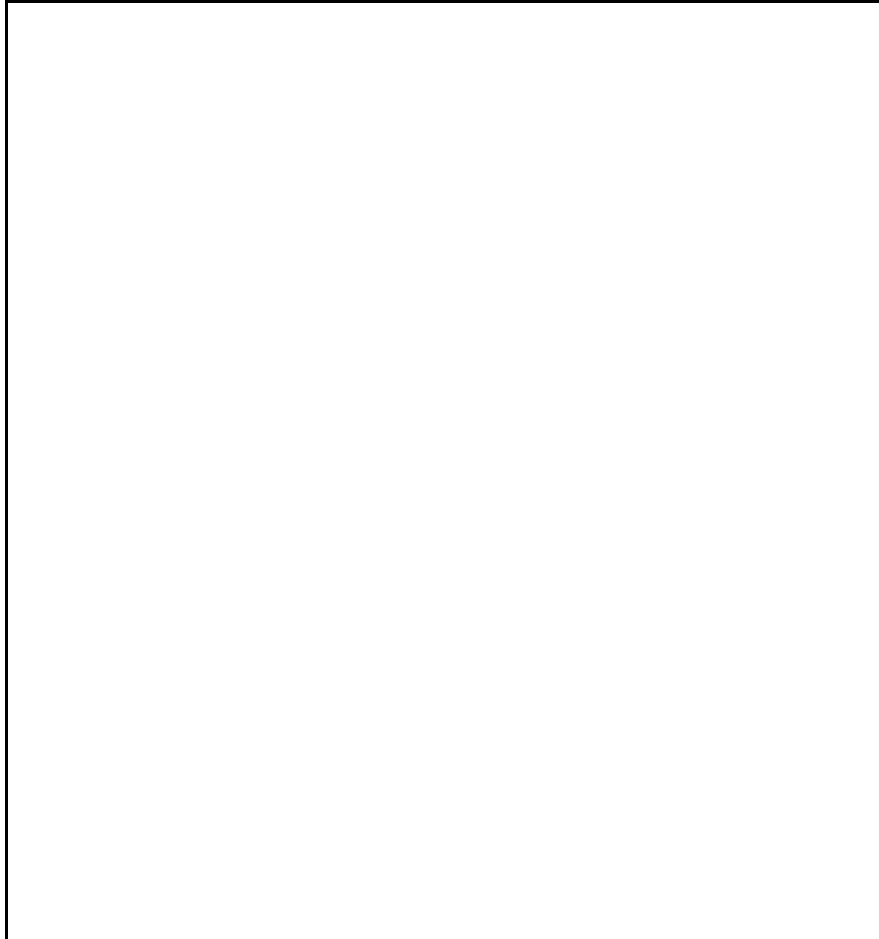


Fig. 3-8: Mallas generadas por la funcional de área

3.3.3 La funcional de ortogonalidad

La ortogonalidad de las líneas de malla es una propiedad importante en la reducción del error de truncación de los esquemas en diferencias, así que la siguiente característica que se desea controlar es precisamente el ángulo de las líneas de malla.

El principio común bajo el cual fueron obtenidas las funcionales de longitud y área fue el de hacer controlar una cantidad mediante funciones de peso, ahora un principio distinto será utilizado, buscaremos hacer cero una cantidad.

Observemos que

$$(x_\xi y_\eta + x_\eta y_\xi) = M_\xi \cdot M_\eta = |M_\xi| |M_\eta| \cos(\theta)$$

donde θ es el ángulo entre los vectores $M_\xi = (x_\xi, y_\xi)$ y $M_\eta = (x_\eta, y_\eta)$ si estos vectores son ortogonales (y en consecuencia las líneas de malla) entonces $\cos(\theta) = 0$ y por lo tanto se tiene:

$$M_\xi \cdot M_\eta = 0$$

Por otro lado si asumimos que el jacobiano de M es distinto de cero ($J \neq 0$) entonces $|M_\xi|$ y $|M_\eta|$, son ambos distintos de cero, así que $M_\xi \cdot M_\eta = 0$ implicará la ortogonalidad de las líneas de malla.

En base a lo anterior definimos la funcional de ortogonalidad como sigue

$$I_{O[M]} = \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^1 (M_\xi \cdot M_\eta)^2 d\xi d\eta = \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^1 (x_\xi x_\eta + y_\xi y_\eta)^2 d\xi d\eta \quad (3.16)$$

el mapeo M que minimice a esta funcional será la mas cercana a la ortogonalidad, y en caso de que el mínimo sea cero entonces las líneas serán realmente ortogonales.

Observemos que en este caso no es necesaria una función de peso lo cual nos ahorra el problema de determinar dicha función.

Las ecuaciones de Euler-Lagrange para la ortogonalidad son:

$$[(x_\xi x_\eta + y_\xi y_\eta)x_\eta]_\xi + [(x_\xi x_\eta + y_\xi y_\eta)x_\xi]_\eta = 0$$

$$[(x_\xi x_\eta + y_\xi y_\eta)y_\eta]_\xi + [(x_\xi x_\eta + y_\xi y_\eta)y_\xi]_\eta = 0$$

o bien en forma vectorial

$$[(M_\xi \cdot M_\eta)M_\eta]_\xi + [(M_\xi \cdot M_\eta)M_\xi]_\eta = 0$$

al desarrollar las derivadas tenemos:

$$\Pi_{11}M_{\xi\xi} + \Pi_{12}M_{\xi\eta} + \Pi_{22}M_{\eta\eta} + S = 0$$

donde

$$\begin{aligned} \Pi_{11} &= \begin{bmatrix} x_\eta^2 & x_\eta y_\eta \\ x_\eta y_\eta & y_\eta^2 \end{bmatrix} & \Pi_{22} &= \begin{bmatrix} x_\xi^2 & x_\xi y_\xi \\ x_\xi y_\xi & y_\xi^2 \end{bmatrix} \\ \Pi_{12} &= \begin{bmatrix} 4x_\xi x_\eta + 2y_\xi y_\eta & x_\xi x_\eta + y_\xi y_\eta \\ x_\xi x_\eta + y_\xi y_\eta & 2x_\xi x_\eta + 4y_\xi y_\eta \end{bmatrix} & S &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

El sistema de ecuaciones que debe ser resuelto es finalmente:

$$(x_\eta^2)x_{\xi\xi} + (x_\eta y_\eta)y_{\xi\xi} + 4(x_\xi x_\eta + 2y_\xi y_\eta)x_{\xi\eta} + (x_\xi y_\eta + x_\eta y_\xi)y_{\xi\eta} + (x_\xi^2)x_{\eta\eta} + (x_\xi y_\xi)y_{\eta\eta} = 0$$

$$(x_\eta y_\eta)x_{\xi\xi} + (y_\eta^2)y_{\xi\xi} + (x_\xi y_\eta + x_\eta y_\xi)x_{\xi\eta} + 4(y_\xi y_\eta + 2x_\xi x_\eta)y_{\xi\eta} + (x_\xi y_\xi)x_{\eta\eta} + (y_\xi^2)y_{\eta\eta} = 0$$

El sistema resultante es cuasilineal, acoplado y no elíptico, todo esto produce problemas en el calculo de la solución, la cual puede no existir o bien no ser única, además la no elipticidad indica que las mallas puedan no ser suaves.

Hay muchas regiones para las cuales los métodos iterativos no convergen posiblemente por que no exista un mapeo ortogonal del cuadrado unitario en tales regiones.

La funcional de ortogonalidad es poco útil por si misma, sin embargo, como veremos en la siguiente sección, su importancia radica principalmente en su combinación con otras funcionales,

debido a su aportación geométrica sobre las mallas.

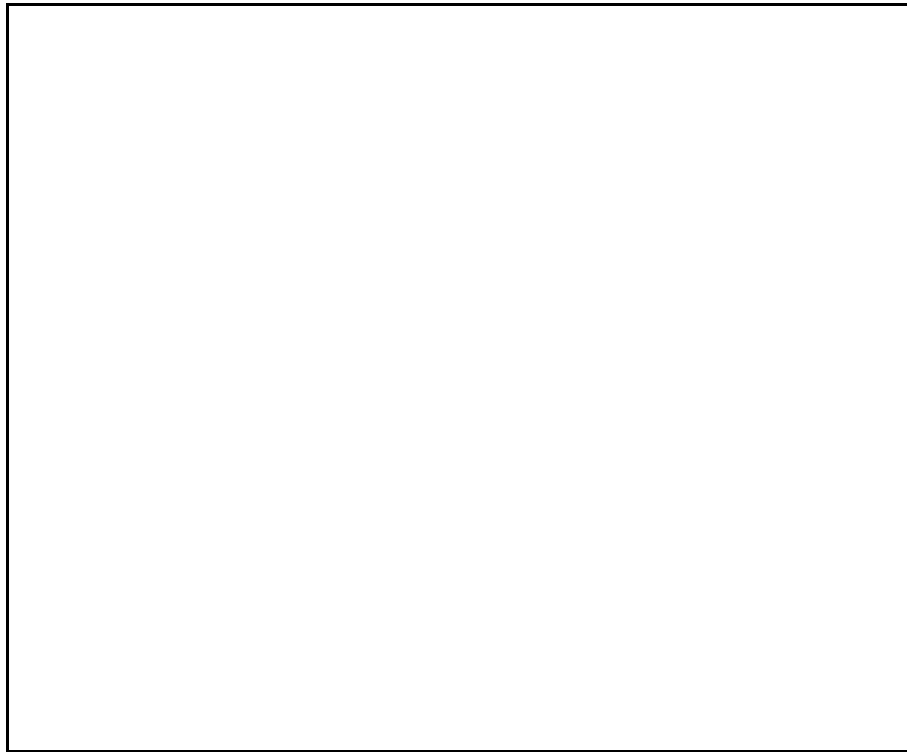


Fig. 3-9: Mallas generadas por la funcional de ortogonalidad

3.3.4 Combinación de funcionales

Las funcionales vistas hasta ahora tienen muchas limitaciones y las mallas generadas no siempre son satisfactorias, sin embargo también tienen propiedades importantes las cuales se desea conservar al generar una malla, por esta razón se busca obtener mejores resultados mediante combinaciones de estas funcionales, al combinarlas se busca aprovechar las cualidades de cada una y reducir sus problemas, dividiendo la acción de ellas.

Consideraremos ahora la siguiente funcional

$$I_w[M] = w_L I_L[M] + w_A I_A[M] + w_O I_O[M] \quad (3.17)$$

donde w_L , w_A y w_O son constantes no negativas tales que $w_L + w_A + w_O = 1$.

Las constantes son elegidas experimentalmente tratando de ajustar la malla mediante la regulación del porcentaje de dependencia de la malla con cada funcional, las constantes w_i son llamadas pesos de la funcional, y no deben ser confundidas con las funciones de peso Φ y Ψ de las funcionales individuales.

Una de las principales ventajas de esta funcional es la gran variedad de combinaciones que pueden realizarse para buscar generar la malla deseada.

3.3.4.1 La funcional área-longitud (AL)

La primera combinación será tomando $w_O = 0$, esto elimina la funcional de ortogonalidad en la combinación, lo cual nos da la funcional área-longitud dada por

$$I_{AL} = w_L I_L[M] + w_A I_A[M] = w_A \int_0^1 \int_0^1 \frac{J^2}{\Phi} d\xi d\eta + w_L \int_0^1 \int_0^1 \left[\frac{|M_\xi|^2}{\Phi} + \frac{|M_\eta|^2}{\Psi} \right] d\xi d\eta$$

La ecuación de Euler-Lagrange para ésta funcional es la combinación lineal de las ecuaciones de cada funcional determinada por los pesos de las funcionales es decir

$$w_A \left[\left(\frac{JM_\eta}{\Phi} \right)_\xi - \left(\frac{JM_\xi}{\Phi} \right)_\eta \right] + w_L \left[\left(\frac{M_\xi}{\Phi} \right)_\xi + \left(\frac{M_\eta}{\Psi} \right)_\eta \right] = 0 \quad (3.18)$$

Como ya se mencionó los pesos se eligen experimentalmente, una combinación que ha dado buenos resultados es $w_A = 0.9$ y $w_L = 0.1$.

Las mallas generadas resultan sin doblez y suaves lo cual no debe ser sorprendente debido a las propiedades de las funcionales implicadas.

Existen regiones donde los métodos iterativos no convergen con la combinación anterior pero nuevas combinaciones pueden intentarse en ellas.

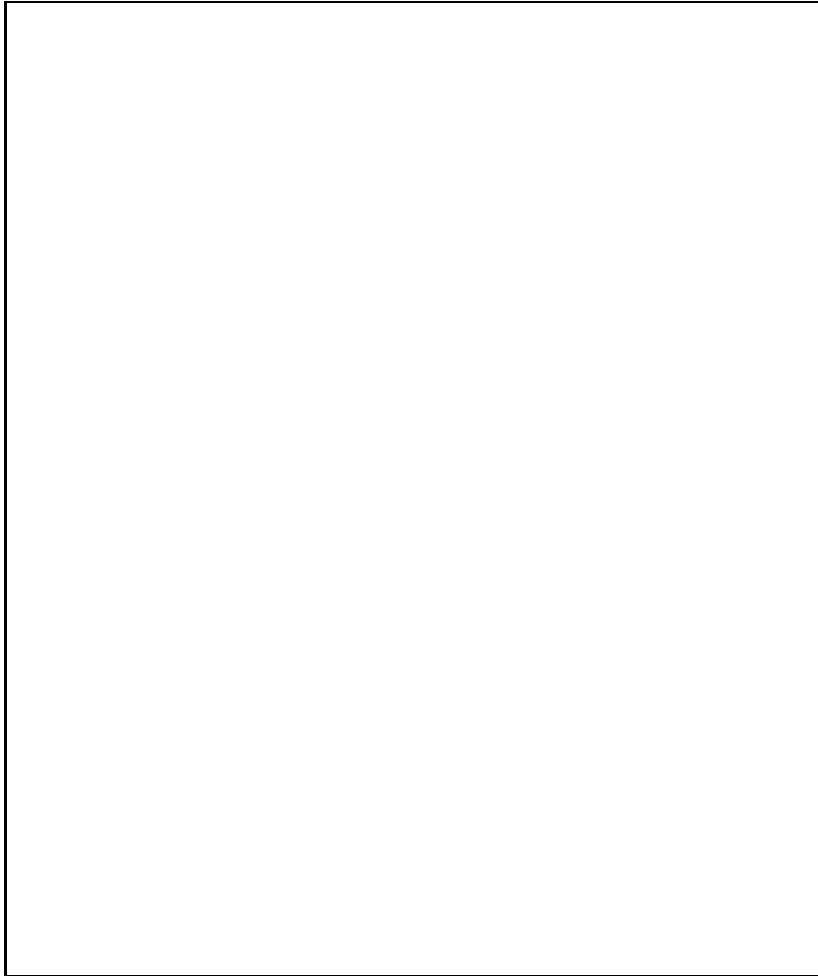


Fig. 3-10: Mallas generadas por A-L

3.3.4.2 La funcional área-ortogonalidad (AO)

Un mejor generador es obtenido eligiendo $w_L = 0$, lo cual da lugar a la funcional de área-ortogonalidad.

Existe un caso particularmente interesante, en el que fijaremos nuestra atención éste consiste en tomar $w_A = w_O = \frac{1}{2}$, esto nos conduce a la funcional

$$I_{AO}[M] = \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^1 \frac{(x_\xi x_\eta + y_\xi y_\eta^2) + (x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi)^2}{\Phi} d\xi d\eta$$

Observemos que el numerador del integrando puede reducirse a la forma

$$(x_\xi^2 + y_\xi^2)(x_\eta^2 + y_\eta^2) = |M_\xi|^2 |M_\eta|^2$$

y de acuerdo con el calculo de variaciones la ecuación de Euler-Lagrange es

$$\left(\frac{|M_\eta|^2 M_\xi}{\Phi} \right)_\xi + \left(\frac{|M_\xi|^2 M_\eta}{\Phi} \right)_\eta = 0 \quad (3.19)$$

El sistema resulta cuasilineal, acoplado y no elíptico.

Como era de esperarse las mallas resultan cercanas a la ortogonalidad y a la distribución uniforme de áreas, lo que resulta interesante es el hecho de que las mallas resultan ser suaves a pesar de que la longitud no ha sido utilizada y de la no elipticidad del sistema.

A pesar de que los resultados son mejores que antes la uniformidad de las áreas puede producir que las celdas cercanas a la frontera de la región sean muy parecidas a las celdas en cualquier otro lado de la malla, esto no es deseable en los cálculos realizados cerca de la frontera y en ocasiones puede solucionarse con alguna función de peso especifica.

Las mallas no tienen doblez pero son muy sensibles a la parametrización de la frontera y en algunas regiones los métodos iterativos no convergen.

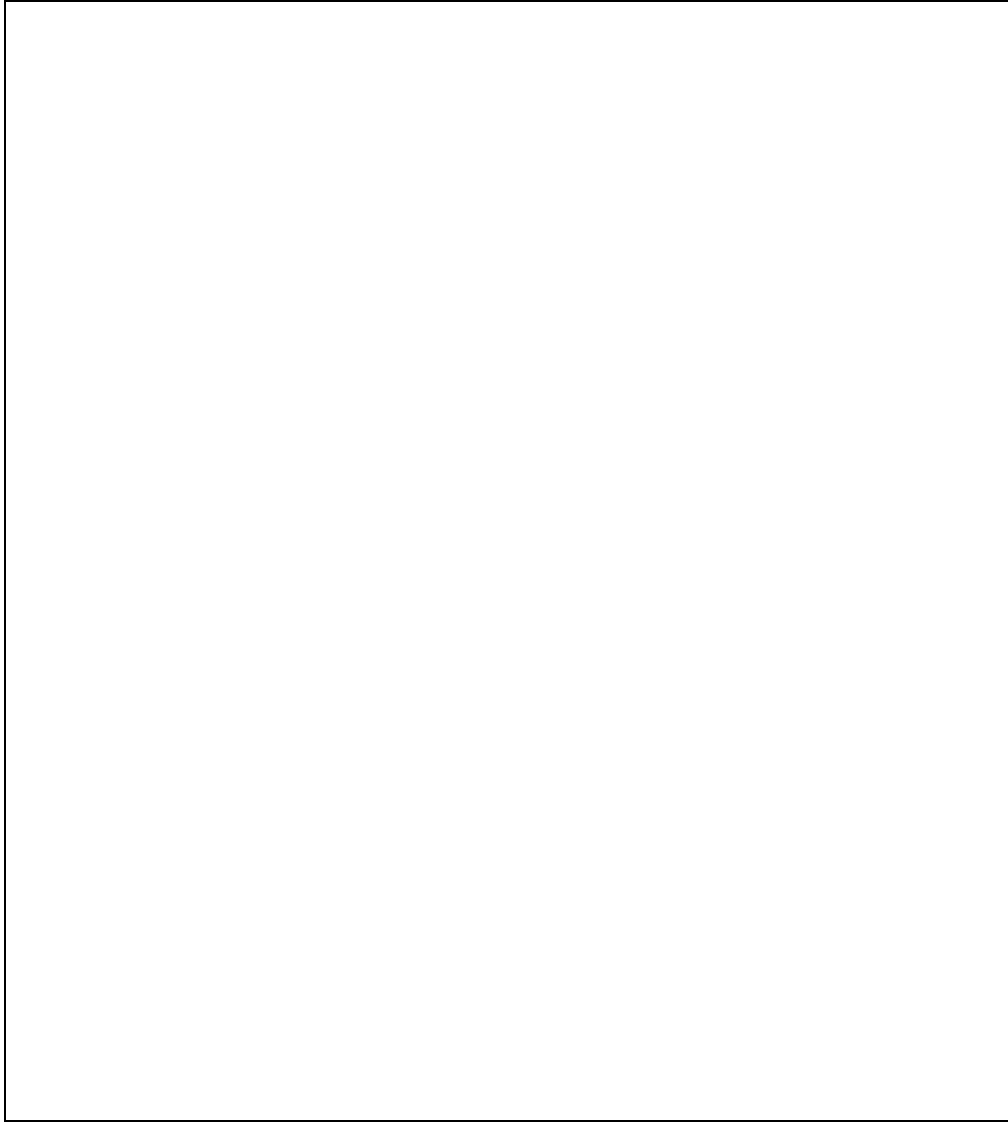


Fig. 3-11: Mallas generadas por la funcional de Area-Ortogonalidad

3.3.5 La funcional de suavidad

Recordemos que la funcional de longitud determina un generador muy sencillo, pero desafortunadamente los resultados no son satisfactorios, principalmente en regiones no convexas, la razón de ésto es que el jacobiano de la transformación que genera la malla puede ser cero en algún punto, lo cual produce que se generen puntos de malla fuera de la región física.

El problema se soluciona para ciertas regiones con el uso de funciones de peso específicas, sin embargo es necesario utilizar una función diferente en cada caso, además dicha función no es fácil de determinar.

En la generación de mallas unidimensional se presentó un problema similar al generar mallas con control del espacio, el problema se resolvió utilizando funciones de peso en el espacio físico, la misma idea será utilizada ahora, es decir deseamos considerar la funcional:

$$I_{L'[M]} = \int_0^1 \int_0^1 \left[\frac{|M_\xi|^2}{W} + \frac{|M_\eta|^2}{V} \right] d\xi d\eta \quad (3.20)$$

donde W y V son funciones definidas en Ω .

Aparentemente el problema sigue siendo el mismo, pues debemos determinar una función para cada región Ω que consideremos, sin embargo solo deseamos garantizar que el jacobiano de la transformación sea distinto de cero, por lo que esta condición debe ser agregada implícitamente en las funciones W y V .

La forma mas sencilla de lograr el efecto deseado es considerar al jacobiano de la transformación como una función que depende de los puntos $(x, y) \in \Omega$, lo que nos conduce a la funcional:

$$I_{S[M]} = \int_0^1 \int_0^1 \left[\frac{|M_\xi|^2 + |M_\eta|^2}{J} \right] d\xi d\eta = \int_0^1 \int_0^1 \left[\frac{x_\xi^2 + y_\xi^2 + x_\eta^2 + y_\eta^2}{x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi} \right] d\xi d\eta \quad (3.21)$$

Esta funcional es conocida como funcional de suavidad.

Observemos que al implementar al jacobiano como una función de peso condicionamos a que las transformaciones M admisibles en $I_{S[M]}$ tengan jacobiano distinto de cero, por lo que

podemos esperar mallas sin doblez generadas a partir de ésta funcional.

Aplicando las fórmulas para las ecuaciones de Euler-Lagrange, obtenemos:

$$\begin{aligned} \left(x_\eta^2 + y_\eta^2\right) x_{\xi\xi} - 2\left(x_\xi x_\eta + y_\xi y_\eta\right) x_{\xi\eta} + \left(x_\xi^2 + y_\xi^2\right) x_{\eta\eta} &= 0 \\ \left(x_\eta^2 + y_\eta^2\right) y_{\xi\xi} - 2\left(x_\xi x_\eta + y_\xi y_\eta\right) y_{\xi\eta} + \left(x_\xi^2 + y_\xi^2\right) y_{\eta\eta} &= 0 \end{aligned} \quad (3.22)$$

El sistema es elíptico, acoplado y no lineal.

Si la frontera de la región y el mapeo entre fronteras es suficientemente suave, entonces la solución al sistema será única, e infinitamente diferenciable en el interior de Ω , es decir que la malla generada sera suave.

La implementación numérica resulta difícil debido a la no linealidad y al acoplamiento de las ecuaciones.

Debido a la elipticidad del sistema 3.22 si las condiciones de frontera son suficientemente suaves, la solución existirá y será única, en tal caso puede garantizarse la suavidad de las mallas, por otro lado la funcional exige que el jacobiano de la transformación sea distinto de cero, por lo que la malla no tendrá dobleces.

En general las mallas son convexas, pero esto depende en parte de la parametrización de las fronteras.

En ciertas regiones la suavidad provoca que las celdas cercanas a la frontera sean muy grandes, ésta situación es poco deseable en una malla pues esto contribuye para incrementar el error de truncamiento.

3.3.5.1 El generador ttm en dos dimensiones.

Las ecuaciones de Euler-Lagrange para la funcional de suavidad pueden ser obtenidas por un proceso distinto, consideremos ahora que deseamos mapear una región Ω sobre el cuadrado unitario I_2 de tal forma que el mapeo cumpla las ecuaciones:

$$\begin{aligned} \xi_{xx} + \xi_{yy} &= 0 \\ \eta_{xx} + \eta_{yy} &= 0 \end{aligned} \quad (3.23)$$

Esto es una extensión del generador TTM unidimensional visto anteriormente.

El sistema (3.23) puede transformarse el sistema (3.22) para las variables dependientes x y y por medio de las formulas obtenidas en la última sección del capítulo 2 tomando:

$$\alpha = 1; \quad \beta = 0; \quad \gamma = 1; \quad f_1(x, y) = \xi(x, y); \quad f_2(x, y) = \eta(x, y).$$

3.4 METODOS DISCRETOS

En los métodos variacionales vistos anteriormente las mallas son obtenidas resolviendo un sistema de ecuaciones diferenciales sobre I_2 , sin embargo las mallas también pueden generarse obteniendo cada uno de los nodos que la forman de tal forma que se cumplan las condiciones geométricas o analíticas buscadas, a estos procesos se les denomina **métodos discretos**.

Estos métodos pueden ser obtenidos directamente al imponer condiciones sobre los nodos o bien discretizando las funcionales estudiadas anteriormente.

3.4.1 El área como función de peso para la longitud.

Recordemos que el área de una celda esta determinada por el jacobiano de la transformación usada, sobre todo por que la malla en el cuadrado unitario es uniforme, es decir las áreas de las celdas son todas iguales, así pues si una celda en la malla generada sobre la región Ω tiene área muy pequeña esto significa que el jacobiano es cercano a cero, situación que se busca evitar.

En el caso de la funcional de longitud el problema es precisamente que no se tiene control sobre el jacobiano.

Así surge la idea de dar mayor peso a las longitudes de los vectores $M_\xi = (x_\xi, y_\xi)$ y $M_\eta = (x_\eta, y_\eta)$ en las celdas de área pequeña, es decir deseamos controlar la cantidad:

$$S = \frac{l_{i,j}}{A_{i,j}} \tag{3.24}$$

o de manera equivalente, controlar:

$$S_{LA} = \sum_{i=1}^{N_0} \sum_{j=1}^{N_1} \frac{l_{i,j}}{A_{i,j}} \tag{3.25}$$

donde $l_{i,j}$ y $A_{i,j}$ están definidas como en las funcionales de longitud y área respectivamente.

La idea como en los casos anteriores es minimizar la última suma, sin embargo ahora no llevaremos esta suma al caso límite.

Para poder llevar a cabo la suma (3.25) es necesario que $A_{i,j} \neq 0$ para toda pareja i, j , lo que significa que la malla inicial debe ser convexa.

Por supuesto esta misma restricción es necesaria para la funcional de suavidad cuando es aplicada sobre mallas iniciales generadas por métodos algebraicos, pero estos métodos no siempre cumplen esta condición.

Para resolver este problema podemos modificar la expresión (3.24) considerando:

$$S = \frac{l_{i,j}}{k + A_{i,j}} \quad k > 0$$

de esta manera la restricción es $A_{i,j} > -k$ por lo que la malla inicial ya no necesita ser convexa.

Ahora la suma (3.25) toma la forma:

$$S_{LA} = \sum_{i=1}^{N_0} \sum_{j=1}^{N_1} \frac{l_{i,j}}{k + A_{i,j}} \quad (3.26)$$

por lo que puede llevarse a cabo sin dificultad si tomamos $k > \min_{i,j} \{A_{i,j}\}$.

Las mallas generadas de esta manera son similares a las generadas por suavidad, sin embargo ahora podemos utilizar mallas no convexas como mallas iniciales.

La suma (3.26) representa una funcional discreta la cual no tiene una funcional continua análoga, pues el proceso de llevar esta suma a una doble integral como se hizo en el capítulo anterior "pierde" la información del parámetro k .

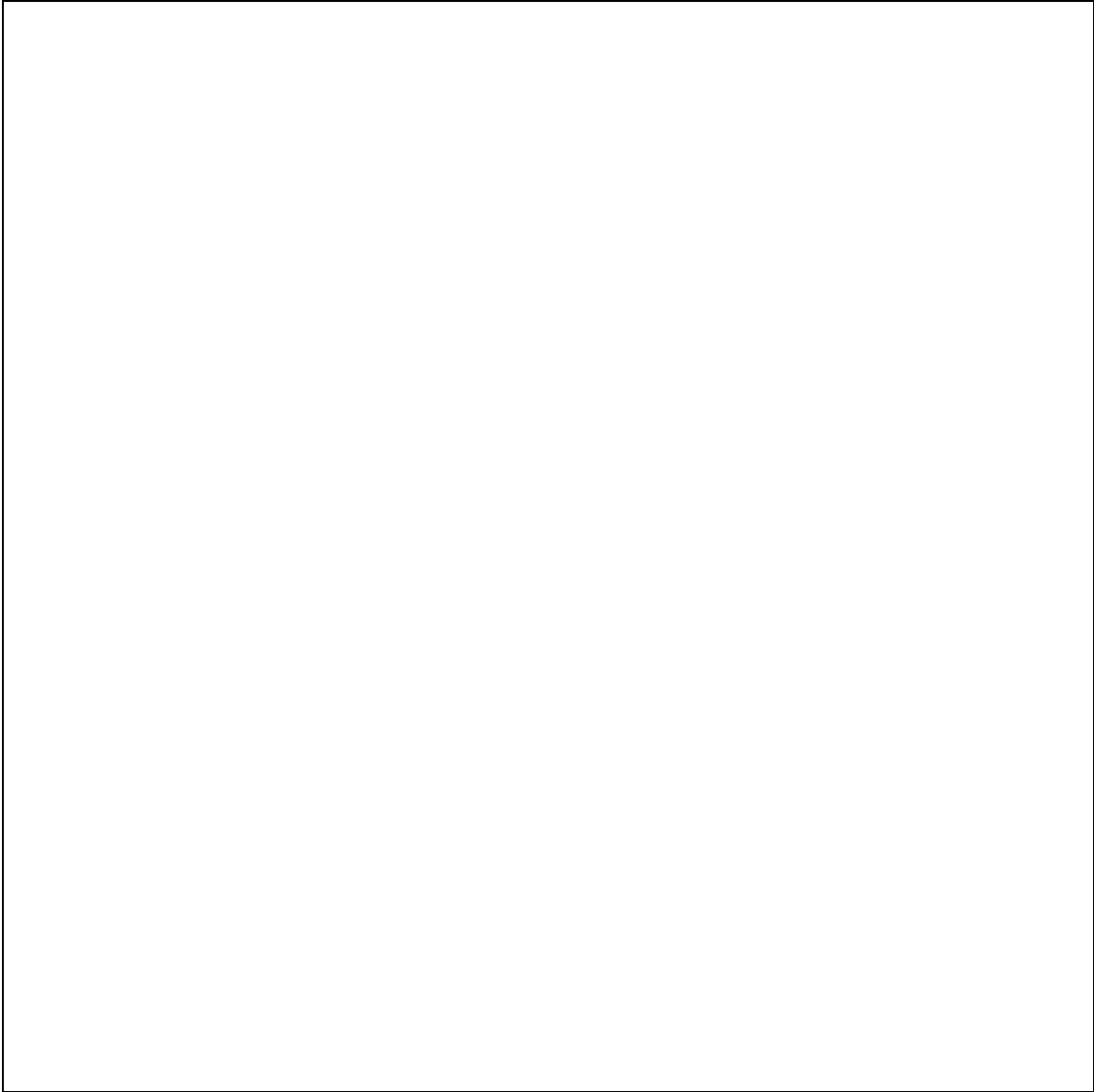


Fig. 3-12: Mallas generadas por suavidad

3.5 IMPLEMENTACION NUMERICA

Las ecuaciones obtenidas para la generación de mallas en general no puede ser resueltas de manera analítica, por lo que resulta necesario aproximarlas numéricamente.

Las gráficas presentadas anteriormente han sido generadas por el siguiente algoritmo, el cual fue desarrollado por Steinberg y Knupp, y en él se consideran a las funcionales sin peso,

Las ecuaciones pueden ser escritas de manera general de la siguiente forma:

$$A_{11}x_{\xi\xi} + A_{12}y_{\xi\xi} + B_{11}x_{\xi\eta} + B_{12}y_{\xi\eta} + C_{11}x_{\eta\eta} + C_{12}y_{\eta\eta} = F_1 \quad (3.27)$$

$$A_{12}x_{\xi\xi} + A_{22}y_{\xi\xi} + B_{12}x_{\xi\eta} + B_{22}y_{\xi\eta} + C_{12}x_{\eta\eta} + C_{22}y_{\eta\eta} = F_2$$

donde los coeficientes $A_{i,j}; B_{i,j}; C_{i,j}$ y F_i para $i, j = 1, 2$ son funciones que dependen de las primeras derivadas de x y de y así como de las funciones de peso.

Al ignorar a las funcionales sin peso se tiene: $F_1 = F_2 = 0$.

El primer paso es la generación de una malla inicial $(x_{i,j}^{(0)}, y_{i,j}^{(0)})$ $i = 1, 2, \dots, N_0$; $j = 1, \dots, N_1$ por métodos computacionalmente económicos, para esto los generadores algebraicos como la interpolación transfinita (T.F.I.) suelen ser de gran utilidad.

A partir de la malla inicial deben calcularse los coeficientes de la ecuación, esto se lleva a cabo sobre cada uno de los puntos de la malla.

El calculo de estos coeficientes en el algoritmo original se realiza discretizando las primeras derivadas por el esquema central

$$x_{\xi} \approx \frac{x_{i+1,j}^{(0)} - x_{i-1,j}^{(0)}}{2\Delta\xi} \quad x_{\eta} \approx \frac{x_{i,j+1}^{(0)} - x_{i,j-1}^{(0)}}{2\Delta\eta}$$

$$y_{\xi} \approx \frac{y_{i+1,j}^{(0)} - y_{i-1,j}^{(0)}}{2\Delta\xi} \quad y_{\eta} \approx \frac{y_{i,j+1}^{(0)} - y_{i,j-1}^{(0)}}{2\Delta\eta}$$

Fig. 3-13:

y sustituyendo estas expresiones en cada uno de los coeficientes, para ejemplificar esto tomemos el coeficiente $C_{12} = x_\xi y_\eta$ correspondiente a la ecuación de área, al sustituir los esquemas correspondientes se tiene:

$$\left(C_{12}^{i,j}\right)^{(0)} = \left(\frac{x_{i+1,j}^{(0)} - x_{i-1,j}^{(0)}}{2\Delta\xi}\right) \left(\frac{y_{i+1,j}^{(0)} - y_{i-1,j}^{(0)}}{2\Delta\xi}\right) = \frac{\left(x_{i+1,j}^{(0)} - x_{i-1,j}^{(0)}\right) \left(y_{i+1,j}^{(0)} - y_{i-1,j}^{(0)}\right)}{4\Delta\xi^2}$$

Sin embargo se han obtenido mejores resultados mediante un cálculo diferente de estos coeficientes, ésto es descrito ahora:

Consideremos la cuatro celdas para las cuales el punto $\mathbf{P}_{i,j} = (x_{i,j}, y_{i,j})$, es un vértice, y tracemos en cada una de ellas sus dos diagonales, esto nos proporciona 12 triángulos con vértices en los puntos de la malla, (fig. 3.13).

Las derivadas se discretizan en cada lado de un triángulo por el esquema "adelante",

$$x_\xi \approx \frac{x_{i+1,j}^{(0)} - x_{i,j}^{(0)}}{\Delta\xi} \quad x_\eta \approx \frac{x_{i,j+1}^{(0)} - x_{i,j}^{(0)}}{\Delta\eta}$$

$$y_\xi \approx \frac{y_{i+1,j}^{(0)} - y_{i,j}^{(0)}}{\Delta\xi} \quad y_\eta \approx \frac{y_{i,j+1}^{(0)} - y_{i,j}^{(0)}}{\Delta\eta}$$

y se sustituyen en los coeficientes, posteriormente las discretizaciones sobre cada triángulo son sumadas y divididas por 12 para obtener un solo esquema.

Tomemos nuevamente el caso de $C_{1,2}$ para el área.

La discretización en los triángulos 1 y 2 es:

$$\left(C_{12}^{i,j}\right)_1^{(0)} = \left(\frac{x_{i+1,j}^{(0)} - x_{i,j}^{(0)}}{\Delta\xi}\right) \left(\frac{y_{i+1,j}^{(0)} - y_{i-1,j}^{(0)}}{\Delta\xi}\right) = \frac{\left(x_{i+1,j}^{(0)} - x_{i,j}^{(0)}\right) \left(y_{i+1,j}^{(0)} - y_{i-1,j}^{(0)}\right)}{\Delta\xi^2}$$

$$\left(C_{12}^{i,j}\right)_2^{(0)} = \left(\frac{x_{i+1,j+1}^{(0)} - x_{i,j+1}^{(0)}}{\Delta\xi}\right) \left(\frac{y_{i+1,j+1}^{(0)} - y_{i,j+1}^{(0)}}{\Delta\xi}\right) = \frac{\left(x_{i+1,j+1}^{(0)} - x_{i,j+1}^{(0)}\right) \left(y_{i+1,j+1}^{(0)} - y_{i,j+1}^{(0)}\right)}{\Delta\xi^2}$$

Finalmente el coeficiente se determina de la siguiente manera:

$$\left(C_{12}^{i,j}\right)^{(0)} = \frac{1}{12} \sum_{k=1}^{12} \left(C_{12}^{i,j}\right)_k^{(0)}$$

Este esquema proporciona un mayor control sobre los coeficientes y ayudando a que las funcionales de área y de ortogonalidad converjan en un mayor número de regiones que con el cálculo anterior.

De manera independiente a los coeficientes se discretizan las segundas derivadas:

$$x_{\xi\xi} \approx \frac{x_{i+1,j}^{(0)} - 2x_{i,j}^{(1)} + x_{i-1,j}^{(0)}}{\Delta\xi^2} \quad x_{\eta\eta} \approx \frac{x_{i,j+1}^{(0)} - 2x_{i,j}^{(1)} + x_{i,j-1}^{(0)}}{\Delta\eta^2}$$

$$y_{\xi\xi} \approx \frac{y_{i+1,j}^{(0)} - 2y_{i,j}^{(1)} + y_{i-1,j}^{(0)}}{\Delta\xi^2} \quad y_{\eta\eta} \approx \frac{y_{i,j+1}^{(0)} - 2y_{i,j}^{(1)} + y_{i,j-1}^{(0)}}{\Delta\eta^2}$$

$$x_{\xi\eta} \approx \frac{x_{i+1,j+1}^{(0)} - x_{i+1,j-1}^{(0)} - x_{i-1,j+1}^{(0)} + x_{i-1,j-1}^{(0)}}{\Delta\xi\Delta\eta}$$

$$y_{\xi\eta} \approx \frac{y_{i+1,j+1}^{(0)} - y_{i+1,j-1}^{(0)} - y_{i-1,j+1}^{(0)} + y_{i-1,j-1}^{(0)}}{\Delta\xi\Delta\eta}$$

Posteriormente se sustituyen los coeficientes y las discretizaciones anteriores en cada ecuación,

con lo que se tiene:

$$\begin{aligned}
& \left(A_{11}^{i,j}\right)^{(0)} \left(\frac{x_{i+1,j}^{(0)} - 2x_{i,j}^{(1)} + x_{i-1,j}^{(0)}}{\Delta\xi^2}\right) + \left(A_{12}^{i,j}\right)^{(0)} \left(\frac{y_{i+1,j}^{(0)} - 2y_{i,j}^{(1)} + y_{i-1,j}^{(0)}}{\Delta\xi^2}\right) + \\
& + \left(B_{11}^{i,j}\right)^{(0)} \left(\frac{x_{i+1,j+1}^{(0)} - x_{i+1,j-1}^{(0)} - x_{i-1,j+1}^{(0)} + x_{i-1,j-1}^{(0)}}{\Delta\xi\Delta\eta}\right) + \\
& + \left(B_{12}^{i,j}\right)^{(0)} \left(\frac{y_{i+1,j+1}^{(0)} - y_{i+1,j-1}^{(0)} - y_{i-1,j+1}^{(0)} + y_{i-1,j-1}^{(0)}}{\Delta\xi\Delta\eta}\right) + \\
& + \left(C_{11}^{i,j}\right)^{(0)} \left(\frac{x_{i,j+1}^{(0)} - 2x_{i,j}^{(1)} + x_{i,j-1}^{(0)}}{\Delta\eta^2}\right) + \left(C_{12}^{i,j}\right)^{(0)} \left(\frac{y_{i,j+1}^{(0)} - 2y_{i,j}^{(1)} + y_{i,j-1}^{(0)}}{\Delta\eta^2}\right) = 0 \\
& \left(A_{12}^{i,j}\right)^{(0)} \left(\frac{x_{i+1,j}^{(0)} - 2x_{i,j}^{(1)} + x_{i-1,j}^{(0)}}{\Delta\xi^2}\right) + \left(A_{22}^{i,j}\right)^{(0)} \left(\frac{y_{i+1,j}^{(0)} - 2y_{i,j}^{(1)} + y_{i-1,j}^{(0)}}{\Delta\xi^2}\right) + \\
& + \left(B_{12}^{i,j}\right)^{(0)} \left(\frac{x_{i+1,j+1}^{(0)} - x_{i+1,j-1}^{(0)} - x_{i-1,j+1}^{(0)} + x_{i-1,j-1}^{(0)}}{\Delta\xi\Delta\eta}\right) + \\
& + \left(B_{22}^{i,j}\right)^{(0)} \left(\frac{y_{i+1,j+1}^{(0)} - y_{i+1,j-1}^{(0)} - y_{i-1,j+1}^{(0)} + y_{i-1,j-1}^{(0)}}{\Delta\xi\Delta\eta}\right) + \\
& + \left(C_{12}^{i,j}\right)^{(0)} \left(\frac{x_{i,j+1}^{(0)} - 2x_{i,j}^{(1)} + x_{i,j-1}^{(0)}}{\Delta\eta^2}\right) + \left(C_{22}^{i,j}\right)^{(0)} \left(\frac{y_{i,j+1}^{(0)} - 2y_{i,j}^{(1)} + y_{i,j-1}^{(0)}}{\Delta\eta^2}\right) = 0
\end{aligned}$$

Observemos que en la discretización de las segundas derivadas aparecen los términos $x_{i,j}^{(1)}$ $y_{i,j}^{(1)}$ estos son precisamente las incógnitas en el sistema de ecuaciones anterior, es decir se tiene

un sistema de 2×2 , pues todos los demás términos se consideran constantes.

Al finalizar el cálculo de todos los puntos de la nueva malla $(x_{i,j}^{(1)}, y_{i,j}^{(1)})$ los coeficientes son actualizados y el proceso se inicia considerando $(x_{i,j}^{(0)}, y_{i,j}^{(0)}) = (x_{i,j}^{(1)}, y_{i,j}^{(1)})$.

Este proceso iterativo se detiene por una tolerancia previamente establecida.

3.6 TRANSFORMACION DEL PROBLEMA DE DIRICHLET

Consideremos ahora el problema de valores en la frontera:

$$(\alpha f_x)_x + (\beta f_x)_y + (\beta f_y)_x + (\gamma f_y)_y = g \quad (x, y) \in \Omega \quad (3.28)$$

$$f = 0 \quad \forall (x, y) \in \partial\Omega$$

donde Ω es una región en el plano y α, β, γ , y g son funciones definidas sobre Ω .

Asumiremos que una transformación $(x, y) = (x(\xi, \eta); y(\xi, \eta))$ del cuadrado unitario I_2 en Ω es dada, tal que $J = x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi \neq 0$.

Podemos entonces considerar a la función f como función de (ξ, η) al tomar

$$f(\xi, \eta) = f(x(\xi, \eta); y(\xi, \eta))$$

De forma análoga pueden considerarse a las funciones α, β, γ , y g definidas en I_2 .

Aplicando la regla de la cadena tenemos:

$$f_\xi = f_x x_\xi + f_y y_\xi \quad f_\eta = f_x x_\eta + f_y y_\eta$$

Como $J \neq 0$ se tiene:

$$f_x = \frac{1}{J} (f_\xi y_\eta - f_\eta y_\xi) \quad f_y = (f_\eta x_\xi - f_\xi x_\eta) \quad (3.29)$$

Teniendo en cuenta que $x_{\xi\eta} = x_{\eta\xi}$ usando las reglas del producto podemos escribir las ecuaciones anteriores de la siguiente manera:

$$f_x = \frac{1}{J} ((fy_\eta)_\xi - (fy_\xi)_\eta) \quad f_y = \frac{1}{J} ((fx_\xi)_\eta - (fx_\eta)_\xi) \quad (3.30)$$

esta es la forma conservativa o simétrica de las derivadas.

De la ecuación (3.29) tenemos:

$$\alpha f_x = \frac{\alpha}{J} (f_\xi y_\eta - f_\eta y_\xi) \quad (3.31)$$

si sustituimos a f en la ecuación (3.30) por (3.31) tenemos:

$$J(\alpha f_x) = \left(\frac{\alpha}{J} (f_\xi y_\eta - f_\eta y_\xi) y_\eta \right)_\xi - \left(\frac{\alpha}{J} (f_\xi y_\eta - f_\eta y_\xi) y_\xi \right)_\eta$$

de la misma forma podemos construir las identidades:

$$J(\beta f_x) = - \left(\frac{\beta}{J} (f_\xi y_\eta - f_\eta y_\xi) x_\eta \right)_\xi + \left(\frac{\beta}{J} (f_\xi y_\eta - f_\eta y_\xi) x_\xi \right)_\eta$$

$$J(\beta f_x) = \left(\frac{\alpha}{J} (-f_\xi x_\eta + f_\eta x_\xi) y_\eta \right)_\xi - \left(\frac{\beta}{J} (-f_\xi x_\eta + f_\eta x_\xi) y_\xi \right)_\eta$$

$$J(\gamma f_x) = - \left(\frac{\gamma}{J} (-f_\xi x_\eta + f_\eta x_\xi) x_\eta \right)_\xi + \left(\frac{\gamma}{J} (f_\xi x_\eta - f_\eta x_\xi) x_\xi \right)_\eta$$

Si multiplicamos la ecuación (3.28) por J , al sustituir estas expresiones y agrupar términos se tiene:

$$(\tilde{\alpha} f_\xi)_\xi + (\tilde{\beta} f_\xi)_\eta + (\tilde{\beta} f_\eta)_\xi + (\tilde{\gamma} f_\eta)_\eta = \tilde{g}$$

con

$$\tilde{\alpha} = \frac{1}{J} (\alpha y_\eta^2 - 2\beta x_\eta y_\eta + \gamma x_\eta^2)$$

$$\tilde{\beta} = -\frac{1}{J} (\alpha y_\xi y_\eta - \beta(x_\xi y_\eta + x_\eta y_\xi) + \gamma x_\xi x_\eta)$$

$$\tilde{\gamma} = \frac{1}{J} (\alpha y_\xi^2 - 2\beta x_\xi y_\xi + \gamma x_\xi^2)$$

$$\tilde{g} = Jg$$

Una vez que el problema ha sido transformado este puede discretizarse como se hizo en la última sección del capítulo anterior, sin embargo ahora los coeficientes $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\beta}$, $\tilde{\gamma}$ y la función \tilde{g} de la ecuación dependen de las derivadas de x y y , las cuales son desconocidas, por lo que sus valores también deberán ser aproximados.

Las siguientes discretizaciones son sugeridas tomando en cuenta la importancia de cada derivada en el correspondiente coeficiente:

$$\tilde{\alpha}_{i-\frac{1}{2},j} = \frac{1}{J_{i-\frac{1}{2},j}} (\alpha y_\eta^2 - 2\beta x_\eta y_\eta + \gamma x_\eta^2)_{i-\frac{1}{2},j}$$

con

$$\begin{aligned} (x_\eta)_{i-\frac{1}{2},j} &= \frac{x_{i,j+1} - x_{i,j-1} + x_{i-1,j+1} - x_{i-1,j-1}}{4\Delta\eta} & (x_\xi)_{i-\frac{1}{2},j} &= \frac{x_{i,j} - x_{i-1,j}}{\Delta\xi} \\ (y_\eta)_{i-\frac{1}{2},j} &= \frac{y_{i,j+1} - y_{i,j-1} + y_{i-1,j+1} - y_{i-1,j-1}}{4\Delta\eta} & (y_\xi)_{i-\frac{1}{2},j} &= \frac{y_{i,j} - y_{i-1,j}}{\Delta\xi} \end{aligned}$$

$$J_{i-\frac{1}{2},j} = (x_\xi)_{i-\frac{1}{2},j} (y_\eta)_{i-\frac{1}{2},j} - (x_\eta)_{i-\frac{1}{2},j} (y_\xi)_{i-\frac{1}{2},j}$$

$$\tilde{\gamma}_{i,j-\frac{1}{2}} = \frac{1}{J_{i,j-\frac{1}{2}}} \left(\alpha y_\xi^2 - 2\beta x_\xi y_\xi + \gamma x_\xi^2 \right)_{i,j-\frac{1}{2}}$$

con

$$\begin{aligned} (x_\xi)_{i,j-\frac{1}{2}} &= \frac{x_{i+1,j} - x_{i-1,j} + x_{i+1,j-1} - x_{i-1,j-1}}{4\Delta\xi} & (x_\eta)_{i,j-\frac{1}{2}} &= \frac{x_{i,j} - x_{i,j-1}}{\Delta\eta} \\ (y_\xi)_{i,j-\frac{1}{2}} &= \frac{y_{i+1,j} - y_{i-1,j} + y_{i+1,j-1} - y_{i-1,j-1}}{4\Delta\xi} & (y_\eta)_{i,j-\frac{1}{2}} &= \frac{y_{i,j} - y_{i,j-1}}{\Delta\eta} \end{aligned}$$

$$J_{i,j-\frac{1}{2}} = (x_\xi)_{i,j-\frac{1}{2}}(y_\eta)_{i,j-\frac{1}{2}} - (x_\eta)_{i,j-\frac{1}{2}}(y_\xi)_{i,j-\frac{1}{2}}$$

$$\tilde{\beta}_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} = \frac{1}{J_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}} \left(\alpha y_\xi^2 - 2\beta x_\xi y_\xi + \gamma x_\xi^2 \right)_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}$$

con

$$\begin{aligned} (x_\xi)_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} &= \frac{x_{i,j} + x_{i,j-1} - x_{i-1,j} - x_{i-1,j-1}}{4\Delta\xi} \\ (x_\eta)_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} &= \frac{x_{i,j} - x_{i,j-1} + x_{i-1,j} - x_{i-1,j-1}}{4\Delta\eta} \\ (y_\xi)_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} &= \frac{y_{i,j} + y_{i,j-1} - y_{i-1,j} - y_{i-1,j-1}}{4\Delta\xi} \\ (y_\eta)_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} &= \frac{y_{i,j} - y_{i,j-1} + y_{i-1,j} - y_{i-1,j-1}}{4\Delta\eta} \end{aligned}$$

$$J_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} = (x_\xi)_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}(y_\eta)_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} - (x_\eta)_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}(y_\xi)_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}$$

Finalmente

$$\tilde{g}_{i,j} = (Jg)_{i,j}$$

$$(x_\xi)_{i,j} = \frac{x_{i+1,j} - x_{i-1,j}}{2\Delta\xi}$$

$$(x_\eta)_{i,j} = \frac{x_{i,j+1} - x_{i,j-1}}{2\Delta\eta}$$

$$(y_\xi)_{i,j} = \frac{y_{i+1,j} - y_{i-1,j}}{2\Delta\xi}$$

$$(y_\eta)_{i,j} = \frac{y_{i,j+1} - y_{i,j-1}}{2\Delta\eta}$$

$$J_{i,j} = (x_\xi)_{i,j}(y_\eta)_{i,j} - (y_\xi)_{i,j}(x_\eta)_{i,j}$$

3.7 SOLUCION DE E.D.P.

USANDO MALLAS RECTANGULARES

En esta sección se muestran algunos resultados obtenidos al aplicar la teoría desarrollada a lo largo de este capítulo, para ello se presenta la solución a diferentes ecuaciones en diversas regiones.

3.7.1 Ecuaciones sobre el cuadrado unitario I_2 .

Consideremos ahora el problema de valores a la frontera:

$$\nabla \cdot (a(x, y)\nabla f(x, y)) = g \quad \forall (x, y) \in I_2$$

$$f = 0 \quad \forall (x, y) \in \partial I_2$$

Este problema se resolvió tomando dos formas diferentes para a y g , la discretización se realizó sobre una malla uniforme y la solución fue comparada con el paquete “PDETOOLS” de

herramientas para “MATLAB”.

La intención de estos ejemplos es la de “medir” la confiabilidad del algoritmo presentado para la solución de ecuaciones.

1) Para el primer modelo se tomó:

$$a(x, y) = 1.1 + \text{sen}(5y - 3x) \qquad g(x, y) = xy$$

En la figura se muestra la gráfica de la solución obtenida y el error al comparar con “MATLAB”.

2) Para el segundo caso se considero:

$$a(x, y) = 1 \qquad g(x, y) =$$

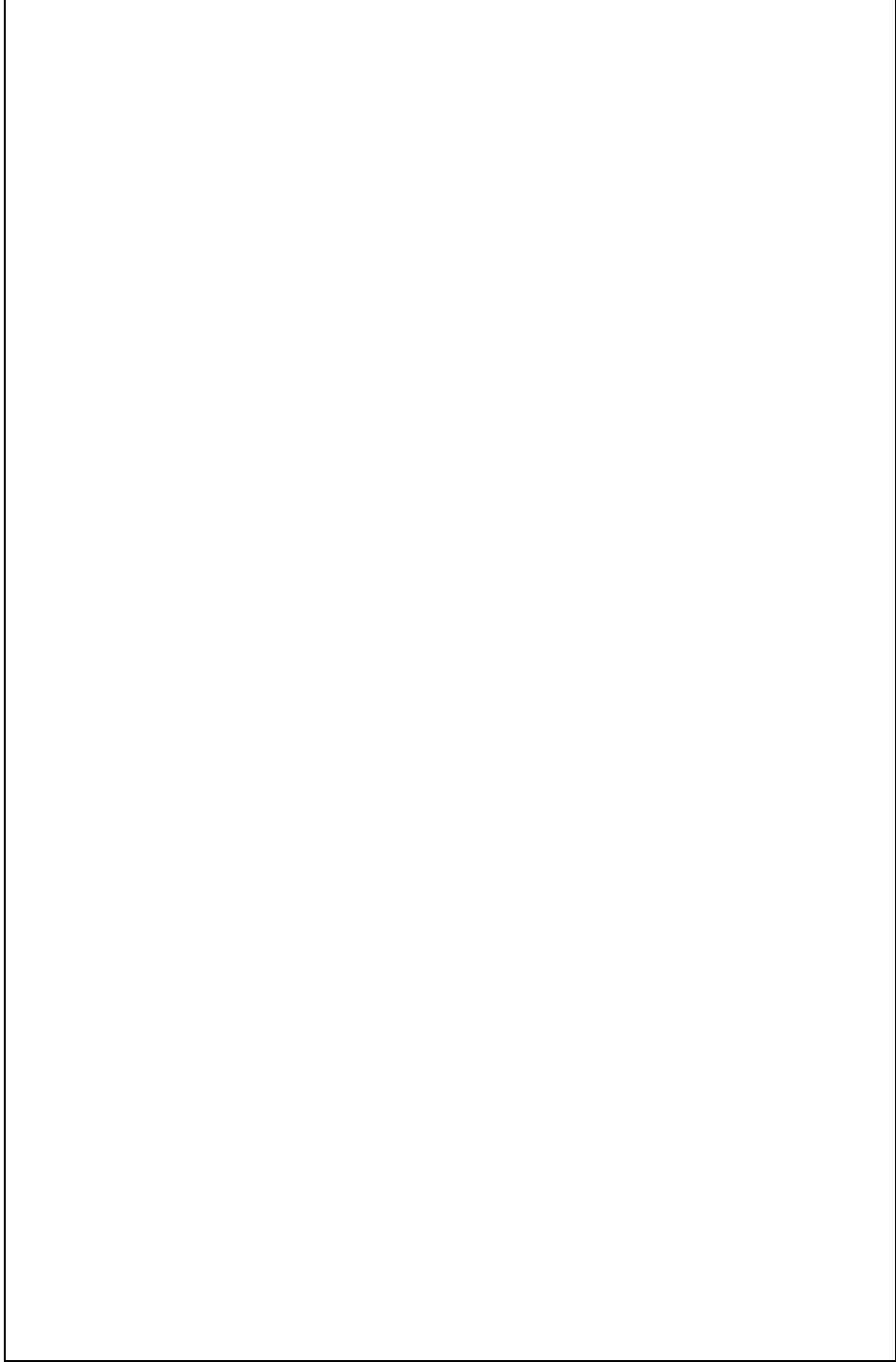


Fig. 3-14:

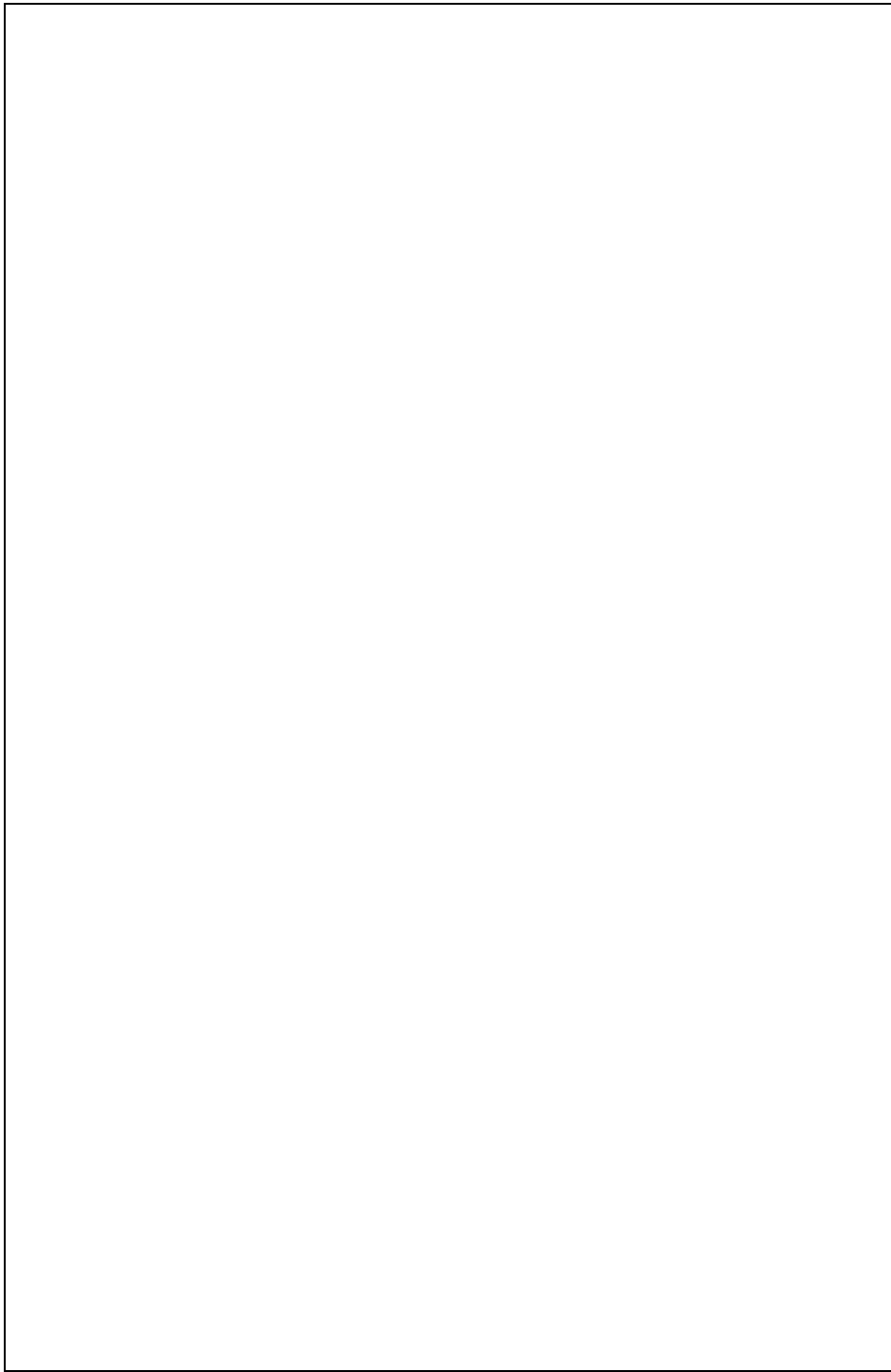


Fig. 3-15:

3.7.2 Regiones irregulares

Tomemos la ecuación:

$$\nabla \cdot (\mathbf{\Lambda} \nabla f(x, y)) = g \quad \forall (x, y) \in \Omega \quad (3.32)$$

donde

$$\mathbf{\Lambda} \equiv \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{bmatrix} = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{D} \mathbf{P}$$

con

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \cos(\frac{\pi}{8}) & \sin(\frac{\pi}{8}) \\ -\sin(\frac{\pi}{8}) & \cos(\frac{\pi}{8}) \end{bmatrix} \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 + 2x^2 + y^2 & 0 \\ 0 & 1 + x^2 + 2y^2 \end{bmatrix}$$

y la función g y las condiciones de frontera son elegidos de tal forma que la solución analítica al problema esta dada por:

$$f(x, y) = \text{sen}(\pi x) \text{sen}(\pi y)$$

Este problema será aproximado en dos regiones irregulares Ω sobre las cuales se ha generado una malla en forma numérica.

3.7.3 Región “Escalón”

La primera aproximación al problema anterior se realiza sobre la región ”escalón” (”backstep”).

La malla es generada con la siguiente combinación de funcionales:

$$.8I_A + .1I_O + .1I_L = 0$$

La región y la solución obtenida son mostradas en la siguiente figura:

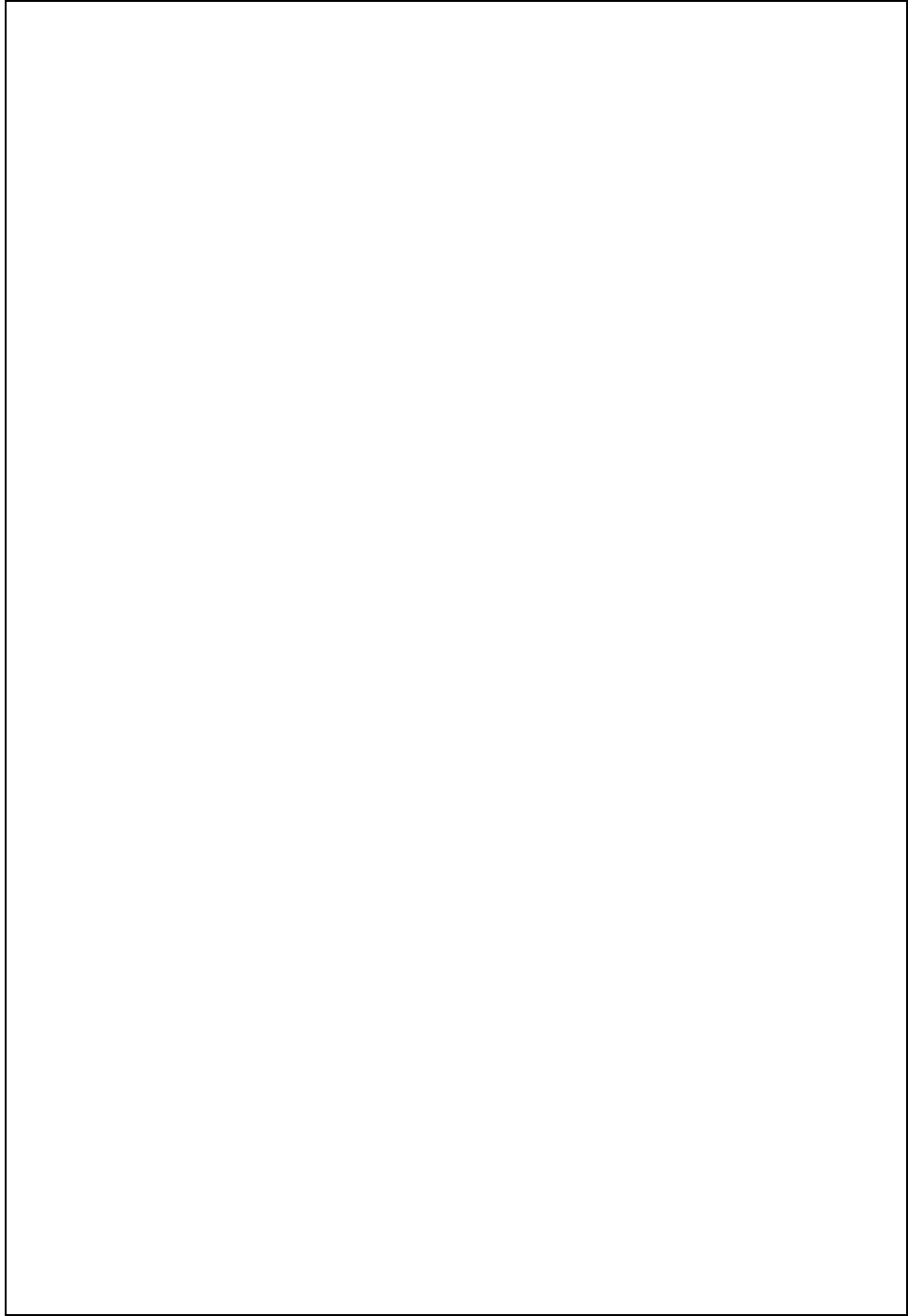


Fig. 3-16:

3.7.4 Región “m19”

La siguiente aproximación al problema se lleva a cabo sobre la región “m19”.

La malla es generada con la siguiente combinación de funcionales:

$$.8I_A + .2I_O + 0I_L = 0$$

La región y solución obtenida son mostradas en la siguiente figura:

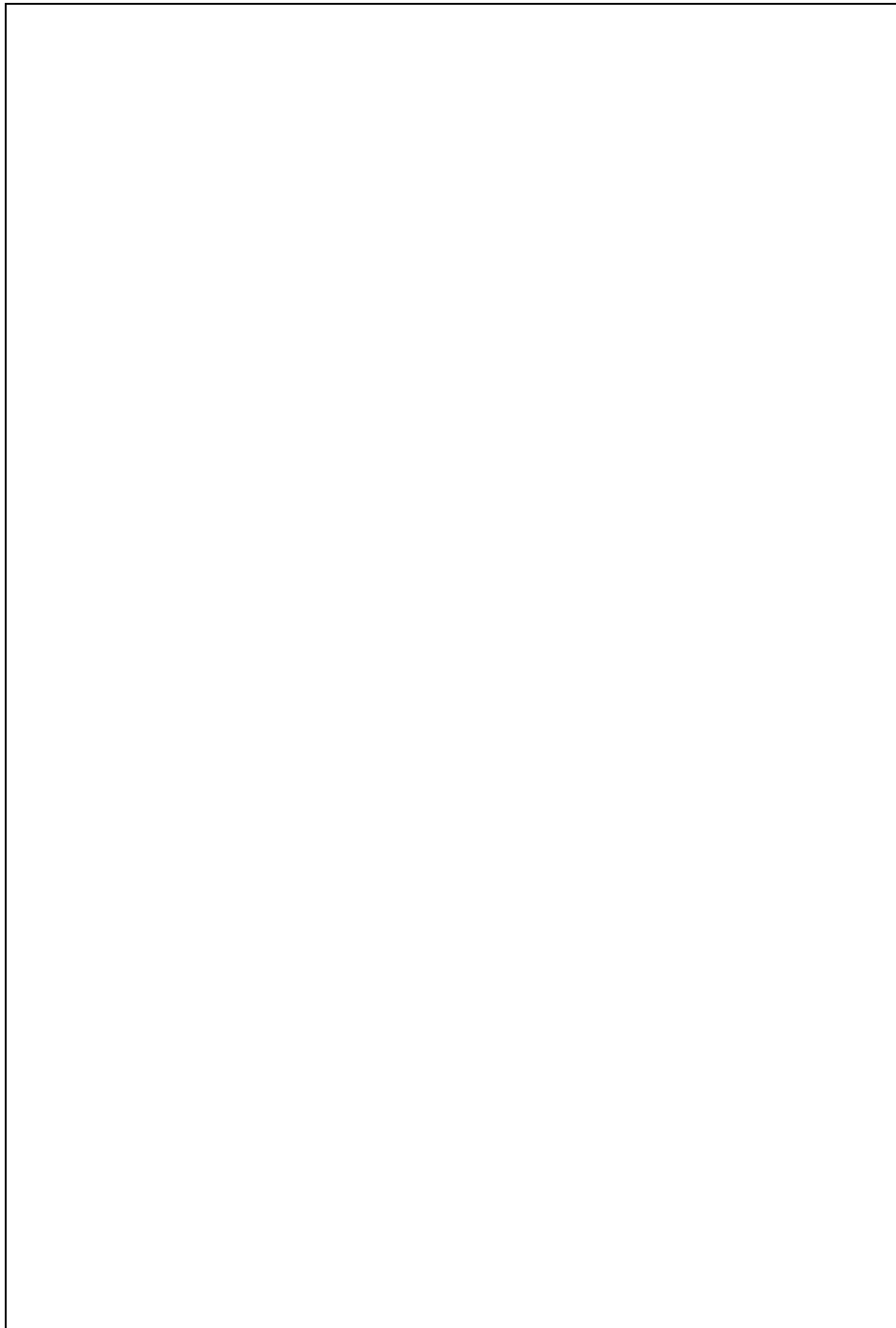


Fig. 3-17:

Dos ejemplos finales

Finalmente mostraremos la solución obtenida para dos ecuaciones cada una de ellas en una región irregular mas complicada que los casos anteriores.

LA HABANA

$$(2xf_x)_x + (3yf_y)_y = x^2y$$

$$f(x, y) = 0 \quad \forall (x, y) \in \partial\Omega$$

MUJER

$$f_{xx} + f_{yy} = xy$$

$$f(x, y) = 0 \quad \forall (x, y) \in \partial\Omega$$

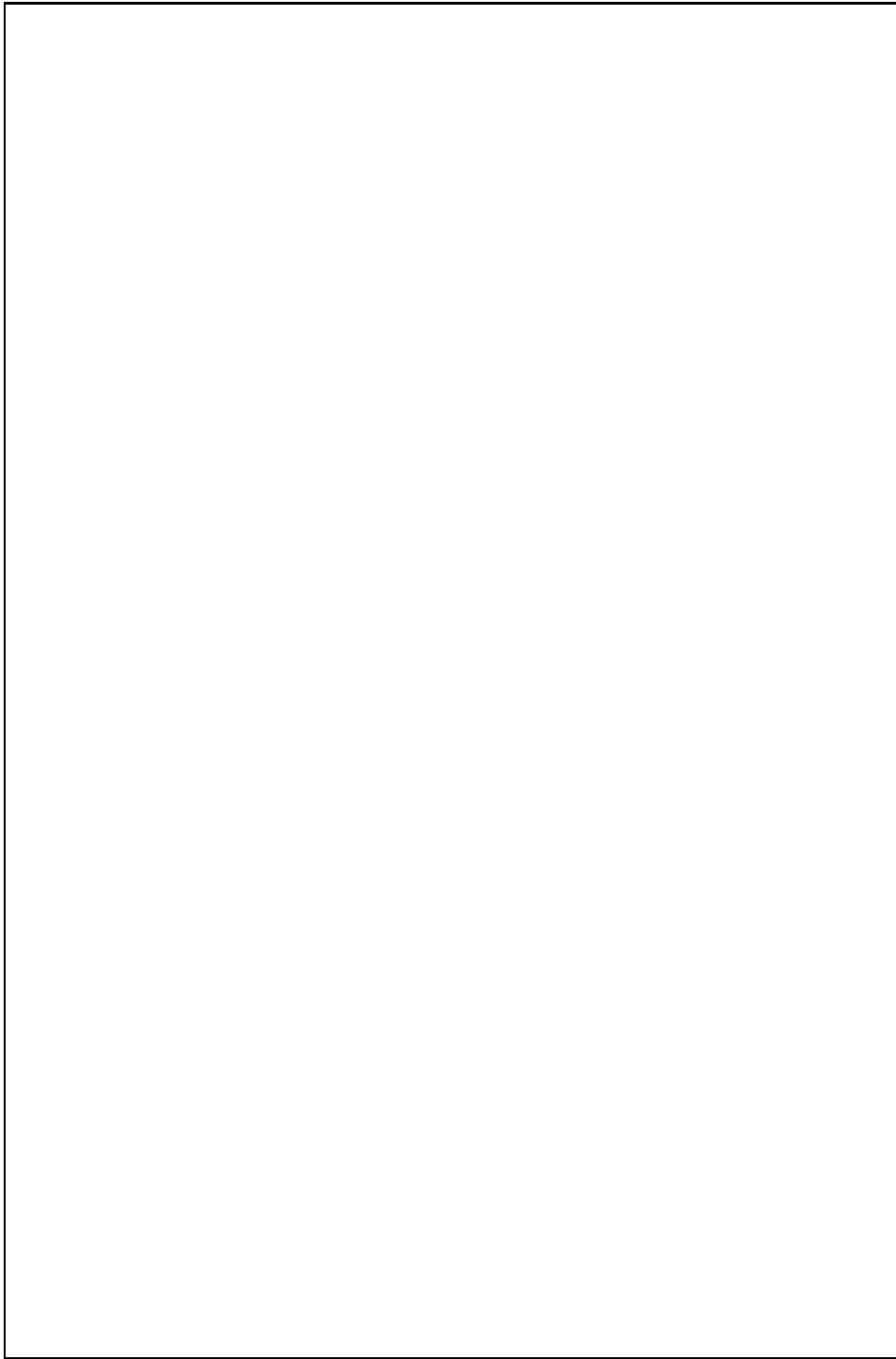


Fig. 3-18:

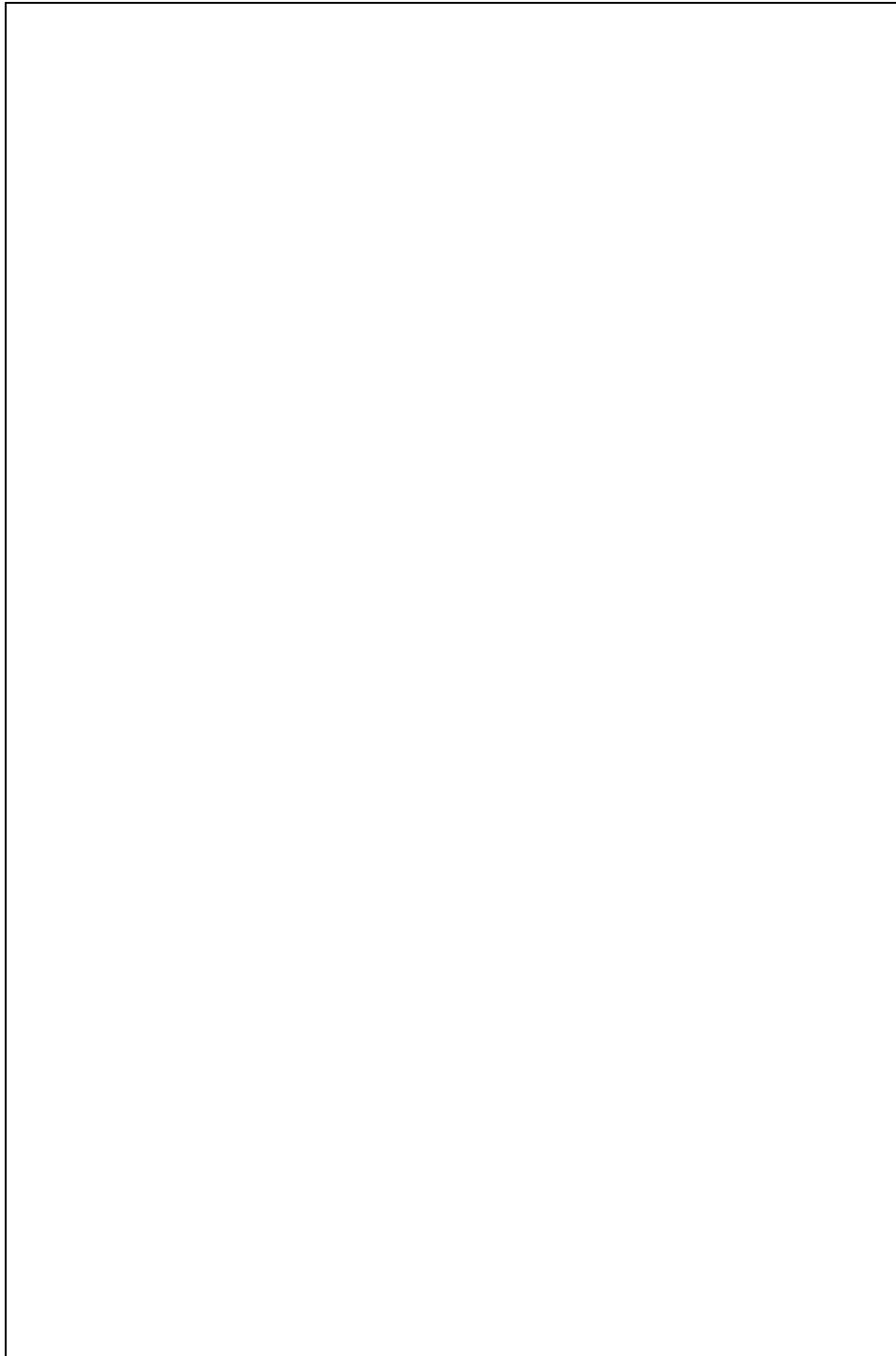


Fig. 3-19:

BIBLIOGRAFIA

- [1] Celia, Michael A. and Gray, William G., [1992]. **Numerical methods for differential equations: fundamentals concepts for scientific and engineering applications** , Pretice-Hall Inc. New Jersey.
- [2] Courant, R, [1950]. **Dirichlet's principle, conformal mapping and minimal surfaces** , Interscience publisher Inc., New York
- [3] Gonzalez, G., [1994]. **Generación de mallas en regiones planas irregulares** , Tesis de licenciatura, Universidad Autónoma de Yucatán, México.
- [4] Gustafson, Karl E., [1980]. **Introduction to partial differential equations and Hilbert space methods** , John Wiley & sons, New York.
- [5] Jamshid, Samareh A. and Robert, E. Smith, [1992]. **A practical approach to algebraic grid adaption** , Computer math. applic. vol 24 No. 5/6 pp.69-81, Great Britain
- [6] Patrick, Knupp and Stanly, Steinberg, [1993]. **Fundamentals of grid generation** , CRC,U.S.A
- [7] Sagan, Hans, [1969]. **Introduction to the calculus of variations** , McGraw Hill N.Y.
- [8] Samarski, A.A. y Andréiev V.B.[1979]. **Metodo en diferencias para las ecuaciones elipticas**, Mir, Moscú
- [9] Thompson, J.F., [1982]. **Numerical grid generation** , North-Holland New York